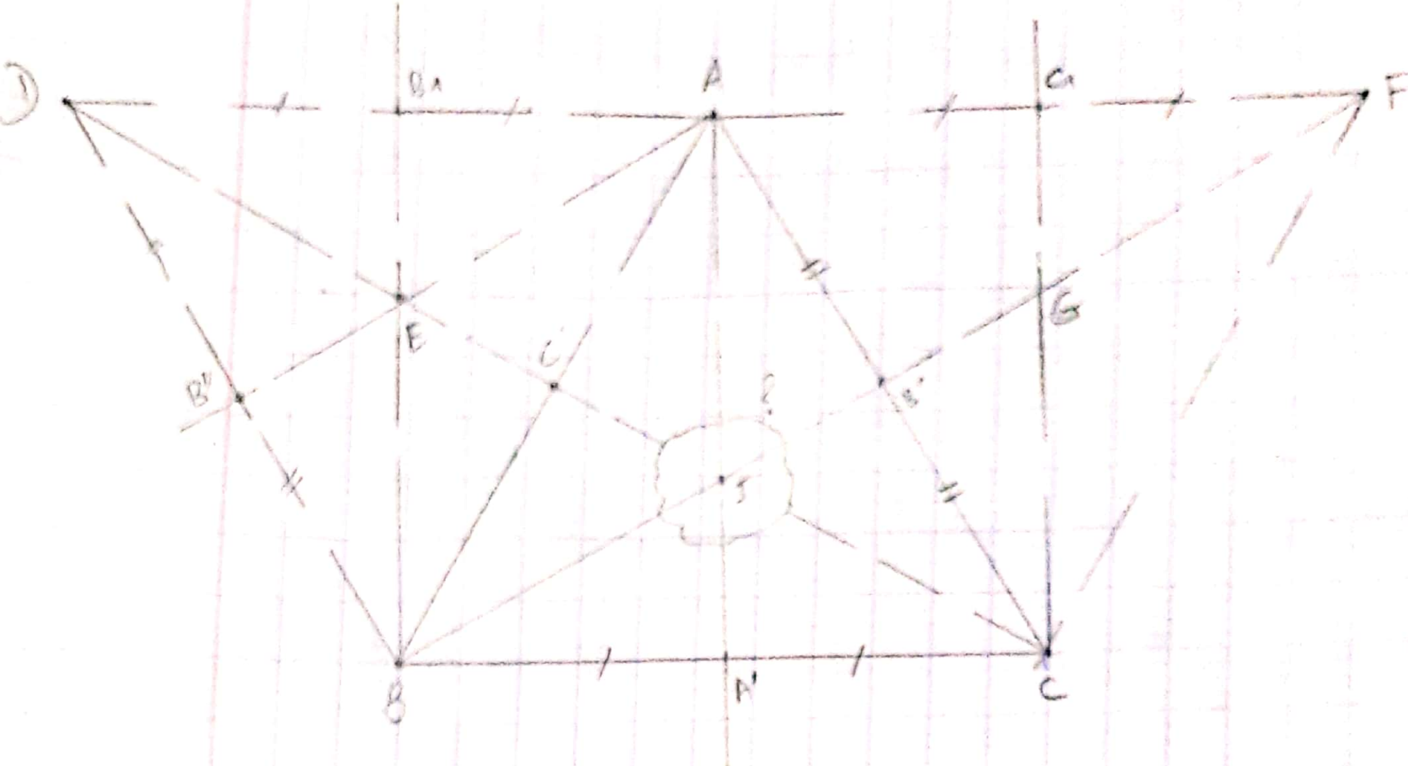
Démonstration intersection en un seul point des 3 médianes d'un triangle



Soit le triangle ABC, avec (AA') médiane en A et (BB') médiane en B, Ces deux médianes se coupent en I.

Traçons le parallélogramme ACBD, donc la diagonale (AB) et la diagonale (DC) se coupent en leurs milieux, soit C' ce point d'intersection.

C' milieu de [AB], donc (DC') est la médiane du triangle ABD en D. Soit (BB_1) la médiane du triangle ABD en B et soit E le pt d'intersection de (DC') et (BB_1).

Scanné avec CamScanner

Donc D, E, C' et C sont alignés.

Traçons aussi le parallélogramme ABCF, donc la diagonale (AC) et la diagonale (BF) se coupent en leurs milieux qui n'est que B'.

Soit (CC_1) la médiane du triangle ACF en C, et soit G le pt d'intersection de (CC_1) avec (BF) ⇒ B, I, B', G et F sont alignés.

On a aussi $(AA') \parallel (BB_1') \parallel (CC_1)$

Soit le triangle (AFI), le théorème de thalès nous permet d'écrire : $\frac{FG}{FI} = \frac{FC_1}{FA} = \frac{GC_1}{AI}$

$\Rightarrow GC_1 = AI \times \frac{FC_1}{FA}$, or $FC_1 = BA'$ et $FA = BC$

$\Rightarrow GC_1 = AI \times \frac{BA'}{BC}$ avec $BA' = \frac{BC}{2}$ (médiane (AA'))

$\Rightarrow GC_1 = AI \times \frac{BC/2}{BC} \Rightarrow \boxed{GC_1 = \frac{AI}{2}}$ (1)

Soit maintenant le triangle (DCC_1), le théorème de thalès nous permet d'écrire :

Scanné avec CamScanner

$$\frac{DE}{DC} = \frac{DB_1}{DC_1} = \frac{EB_1}{CC_1} \Rightarrow EB_1 = CC_1 \times \frac{DB_1}{DC_1}.$$

or $CC_1 = AA'$ et $DB_1 = \frac{BC}{2}$ et $DC_1 = DA + AC_1$.

" $DC_1 = BC + \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}BC$.

Donc $EB_1 = AA' \times \frac{BC/2}{3/2\,BC} \Rightarrow \boxed{EB_1 = \frac{1}{3}AA'}$.

Soit maintenant le triangle (FBB_1), le théorème de thalès nous permet d'écrire encore une fois :

$$\frac{FI}{FB} = \frac{FA}{FB_1} = \frac{AI}{AA'} \Rightarrow AI = AA' \times \frac{FA}{FB_1}$$

or $FA = BC$ et $FB_1 = FA + AB_1 = BC + \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}BC$.

$$\Rightarrow AI = AA' \times \frac{BC}{3/2\,BC} \Rightarrow \boxed{AI = \frac{2}{3}AA'}$$

Donc $EB_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}AI \Rightarrow \boxed{EB_1 = \frac{1}{2}AI}$ (2)

(1) et (2) : Donc $\boxed{GC_1 = EB_1}$ (3), donc E et G se trouvent au même niveau par rapport à la droite (DF) ou (BC).

Scanné avec CamScanner

Donc si je translate le triangle ACF sur le triangle ABD, C va coïncider avec B, F va coïncider (ou va être confondu) avec A, A va coïncider avec D et G va coïncider avec E et donc (FB') va être confondu avec (AB'').

or (AC) // (BD) et (BB') // (AB'') donc

$BB'' = AB'$ or $AC = DB'$.

$\Rightarrow 2AB' = DB'' + BB''$.

$\Rightarrow 2BB'' = DB'' + BB''$

$\Rightarrow \boxed{BB'' = DB''}$ 4

$\Rightarrow$ B'' passe par la médiane (AE) ou plus exactement (AE) est la médiane de ABD passant par B''.

Ce qui signifie que E est le pt d'intersection des 3 médianes (BB₁), (DC') et (AB'') du triangle ABD.

Idem, donc I est le pt d'intersection des 3 médianes (AA'), (BB') et (CC') (les 3 triangles semblables).

Scanné avec CamScanner