Le barycentre au bac S

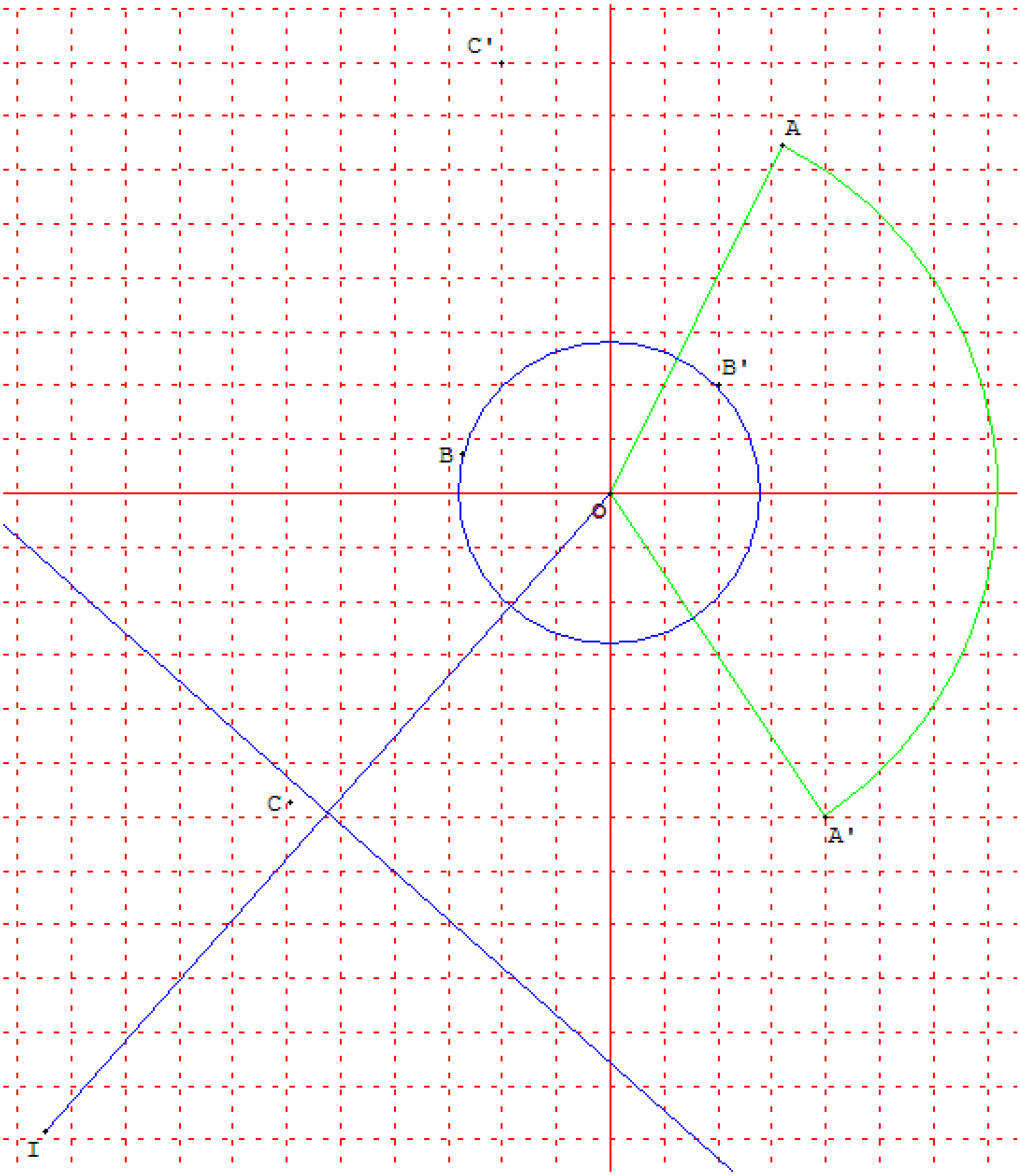
Trois exercices : étude dans le plan complexe et recherche de lieux de points, avec indications de correction.

Sommaire

Faire des maths… avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/barycentre_bac.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/ts/barycentre_bac.html

Document n° 111, réalisé le 29/5/2007



1. Centres étrangers 1997

EXERCICE(*5 points*) pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), l'unité graphique est 1 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3})$;

$z_B = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$;

$z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$.

1. On se propose de placer les points A, B et C dans le repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) à l'aide du compas. Pour cela on considère la rotation R de centre O et d'angle de mesure - $\frac{2\pi}{3}$.

a) Donner l'écriture complexe de R.
b) Vérifier que R transforme le point A en le point A’ d'affixe : 4 - 6i.
On admettra que R transforme les points B et C en les points B’ et C’ d'affixes respectives 2 + 2i et - 2 + 8i.
c) Placer les points A’, B’, C’ puis, à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction du point A sera justifiée).

2.*a)* Calculer $z_A - z_B + z_C$.
b) En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés {(A, 1), (B, - 1), (C, 1)}.

3. Soit l'ensemble C des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
a) Vérifier que B appartient à C.
b) Déterminer puis tracer l'ensemble C.

4. Déterminer puis tracer l'ensemble D des points M du plan tels que :
$2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MC}\|$.

Indications

$z_A - z_B + z_C = 0$.

Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) et (C, γ), quel que soit le point M, on a : $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG}$ (fonction vectorielle de Leibniz).
Donc $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO}$
Avec $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ $z_A - 2z_B + z_C = z_B$, $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OB}$.
C est l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MO}\|$ = OB.
C est le cercle de centre O, passant par B, de rayon $2\sqrt{2}$.

Avec $\alpha = 1$, $\gamma = -3$, I barycentre de (A, 1) et (C, -3) on a $\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MC} = -2\,\overrightarrow{MI}$.
D est l'ensemble des points M du plan tels que 2MO = 2MI, D est la médiatrice de [OI].

2. Polynésie 1997

EXERCICE (*6 points*) pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit, dans l'espace E, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système {(A, 1), (B, - 1), (C, 1)}.

2. On suppose que ABCD est un parallélogramme.

Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD$.

3. On suppose maintenant que ABCD est un rectangle.

Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes ABCD et A'B'C'D' ainsi que les milieux I, J, K et L de [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] respectivement.

1. Montrer que L est barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que IJKL est un parallélogramme.

2. Soit O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes IJKL, ABCD et A'B'C'D'.

Montrer que O est le milieu de [PQ].

Indications

Parallélogramme, *voir* : barycentre 1S

Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) et (C, γ) quel que soit le point M on a :
$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$ (fonction vectorielle de Leibniz).
Donc $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$,
S est l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD}\| = BD$.

S est la sphère de centre D passant par B

3. Inde 1999

EXERCICE (*4 points*) candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire

On considère un triangle ABC du plan.

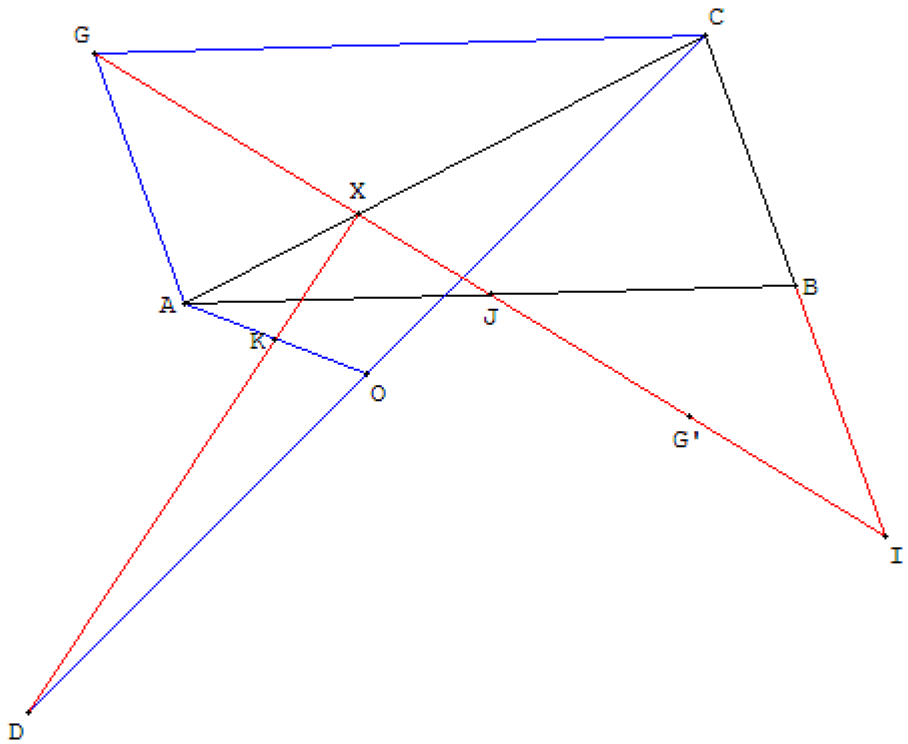
1. *a*) Déterminer et construire le point G, barycentre de [(A ; 1) ; (B ; - 1) ; (C ; 1)].
b) Déterminer et construire le point G', barycentre de [(A ; 1) ; (B ; 5) ; (C ; - 2)].

2. *a*) Soit J le milieu de [AB].
Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).
b) Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; - 1)] appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan,
Soit O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].

a) Déterminer trois réels *a*, *d* et *c* tels que K soit barycentre de [(A ; *a*) ; (D ; *d*) ; (C ; *c*)].
b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
Déterminer les réels *a'* et *c'* tels que X soit barycentre de [(A ; *a'*) ; (C ; *c'*)].

Indications



ABCG est un parallélogramme.
B est le milieu de [CI],
J est le milieu de [GI], G' est le milieu de [JI].

a' = 2, *b'* = 1.