Constructions élémentaires à la règle et au compas

Dix constructions au collège avec GéoPlan : médiatrice, bissectrice, perpendiculaire, parallèle...

Sommaire

Faire des maths… avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Ce document PDF : http://www.debart.fr/pdf/construc_elem.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/geoplan/construc_elem_classique.html

Document n° 57, réalisé le 6/12/2003 - mis à jour le 8/11/2008

À l'école les constructions géométriques de figures simples à la règle, à l'équerre et au compas sont au programme du cours moyen.
Il est essentiel de montrer que le compas ne sert pas uniquement à tracer des cercles, mais aussi à reporter des longueurs égales.

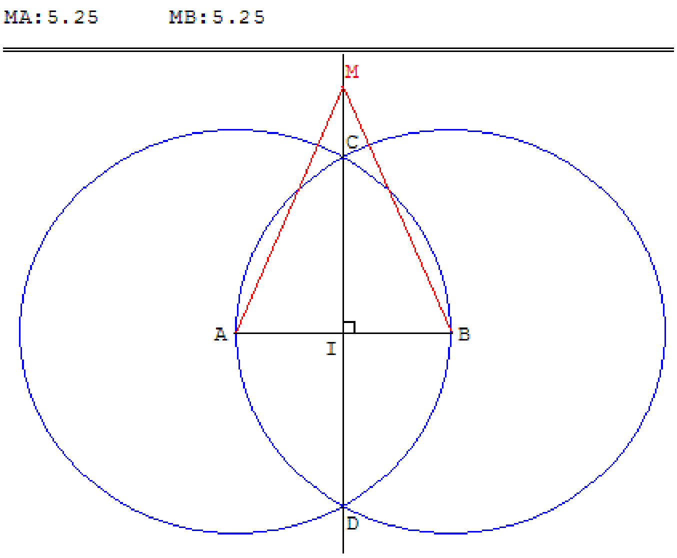
1. Médiatrice d'un segment

Par pliage d'une feuille rabattre un point A sur un point B : appuyer le pli de la feuille qui marque la médiatrice de [AB].

Dessiner la médiatrice d'un segment [AB] avec un compas et une équerre

Ouvrir suffisamment le compas, tracer deux arcs de cercle de même rayon qui se coupent en C.
Avec l'équerre, tracer la perpendiculaire à (AB) passant par C.

Dessiner la médiatrice d'un segment [AB] avec la règle et le compas

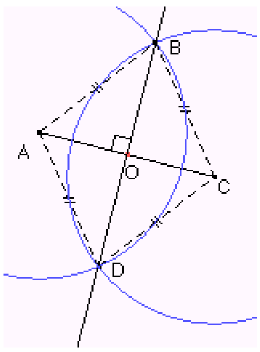


Construction d'*Œnopide de Chio* (Ve siècle avant J.-C.)

Dessiner le segment [AB],
tracer les cercles de centres A et B et rayon AB.
Tracer les points C et C’, intersection des deux cercles.
Tracer la médiatrice (CC') passant par les deux points d'intersection.
Placer un point M libre sur la médiatrice et vérifier l'égalité des longueurs MA = MB.
Gommer les cercles.

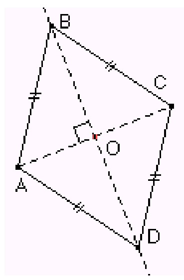
Losange de diagonale [AC]

Placer deux points A et C, tracer un cercle (*c*) de centre A de rayon supérieur à $\frac{AC}{2}$,
et un cercle (*c'*) de même rayon et de centre C.



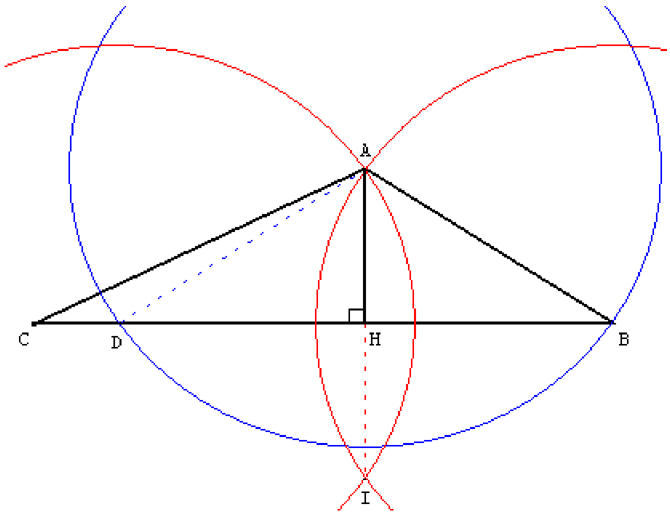
Les cercles (*c*) et (*c'*) se coupent en B et D. La droite (BD) est la médiatrice du segment [AC].

Tracer le quadrilatère ABCD et montrer que ABCD est un losange.
Marquer le centre O et remarquer les droites parallèles.



Les " anciens Égyptiens " utilisaient cette méthode, par exemple dans la construction des pyramides, pour tracer un angle droit :
prendre une corde, faire un nœud au milieu et fixer les deux extrémités sur deux piquets placés en A et C. Tendre la corde de part et d'autre de (AC) en la prenant par le nœud et marquer les points B et D, puis le centre O.

Application : construction d'une hauteur d'un triangle



Pour construire des droites parallèles ou perpendiculaires à la règle et au compas il faut souvent se ramener à la construction de la médiatrice d'un segment.

Pour trouver, à la règle et au compas, la hauteur relative au côté [BC] d'un triangle ABC tel que AC > AB, construire un triangle isocèle ABD où le point D est l'intersection du cercle de centre A passant par B avec la droite (BC).

Avec les cercles de centres B et D passant par A, tracer la médiatrice (AI) de [BD]. I est le deuxième point d'intersection de ces deux derniers cercles.

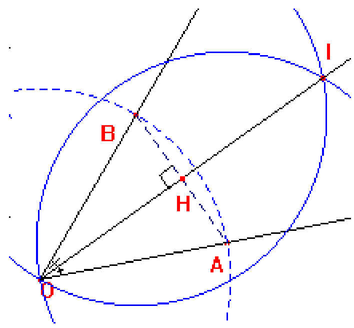
La médiatrice (AI) coupe (CD) en H et (AH) est la hauteur cherchée.

2. Bissectrice d'un angle

Tracer une bissectrice à la règle et au compas.

On se place dans la situation d'un triangle isocèle OAB.

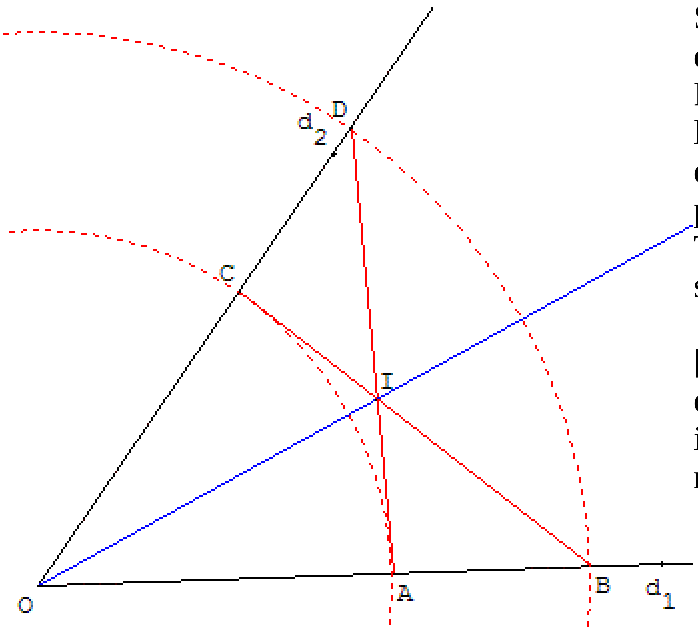
Placer un point O. Tracer deux demi-droites ayant ce point pour origine. Placer un point A sur un des côtés de l'angle. Tracer le cercle de centre O passant par A qui coupe la deuxième demi-droite en B.



Tracer les deux cercles de centre A et B passant par O. Ces deux cercles se recoupent en I.

[OI) est la bissectrice de l'angle AÔB (mesurer les angles) : en effet (OI) est la médiatrice de [AB], c'est une hauteur (OH) du triangle isocèle OAB, c'est donc la bissectrice (intérieure) issue de O de ce triangle.

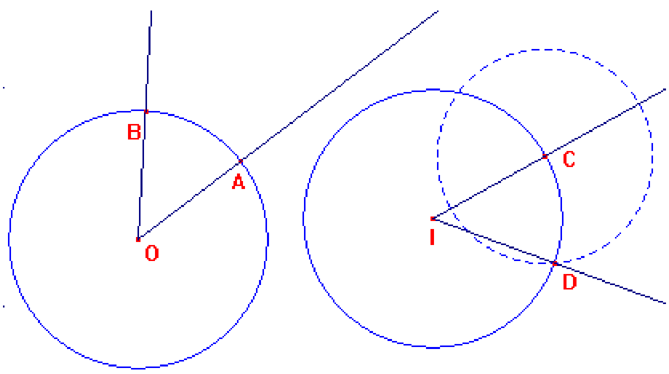
b. Construction par report de mesure



Soit un angle de sommet O formé par deux demi-droites (d_1) et (d_2) ayant ce point pour origine. Placer deux points A et B sur un des côtés (d_1) de l'angle. Reporter les longueurs OA et OB sur la deuxième demi-droite (d_2) en en y plaçant les points C et D tels que OC = OA et OD = OB. Tracer les deux segments [AD] et [BC]. Ces deux segments se recoupent en I.

[OI) est la bissectrice intérieure de l'angle des demi-droites (d_1) et (d_2) : Les triangles isométriques OAD et OBC sont symétriques par rapport à (OI).

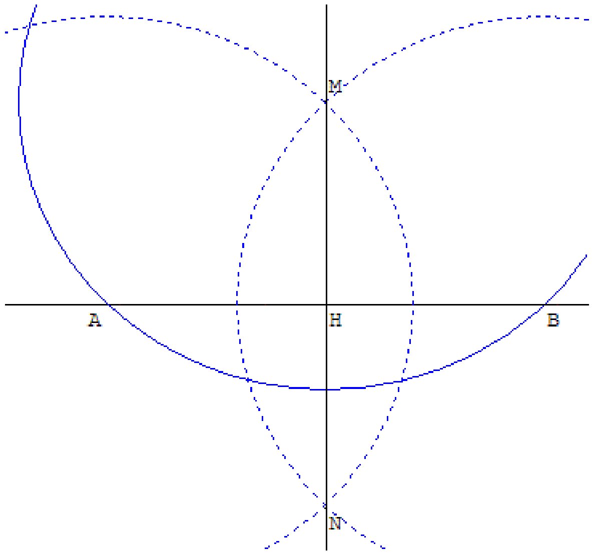
3. Report d'un angle

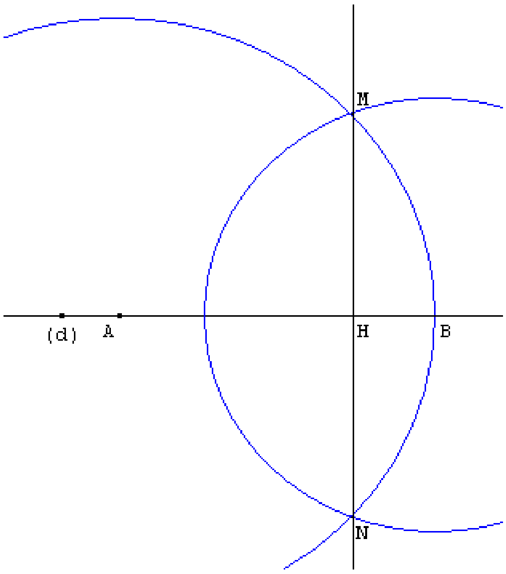


Eudème, cité par Proclus, attribuait à *Œnopide de Chio* (V^{e} siècle avant J.-C.), la découverte du problème relatif à la proposition 23 du livre I d'Euclide : « Sur une droite donnée, et en un point donné sur cette droite, construire un angle égal à un angle donné. ».

Reproduire un angle d'origine O à partir d'une demi-droite d'origine I :
Placer deux points O et I. Tracer deux demi-droites [OA) et [OB_1) ayant pour origine le point O et une demi-droite [IC_1) d'origine I. Tracer le cercle de centre O passant par A qui coupe la droite (OB) en B et B_2, B étant sur le deuxième côté.
Nommer r la longueur OA et tracer le cercle de centre I et de rayon *r*.
Nommer C et C_2 les intersections de ce cercle avec la droite (IC_1), C étant sur la demi-droite.
Nommer *a* la longueur AB et tracer le cercle de centre C et rayon *a*. Nommer D et D_1 les intersections des deux cercles. Tracer la demi-droite [ID).
Les angles AOB et CID sont égaux.

4. Perpendiculaire abaissée d'un point M sur une droite (d)

<table>
<tr>
<td>

Un cercle de centre M rencontre la droite (*d*) en A et B. Deux autres cercles de même rayon de centres A et B passent par M et se recoupent en N. La perpendiculaire est la droite (MN).</td>
<td>

Un point A de la droite (*d*) est le centre d'un cercle passant par M. Il rencontre (*d*) en B. Le cercle de centre B passant par M rencontre le premier cercle en N. La perpendiculaire est la droite (MN).

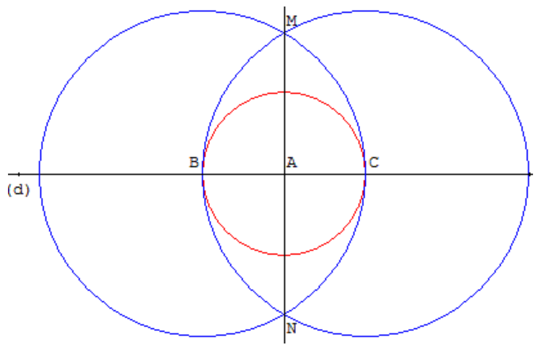
Remarque : Il est possible de remplacer B par n'importe quel point de (*d*), distinct de A.</td>
</tr>
</table>

Configuration : médiane d'un triangle isocèle.

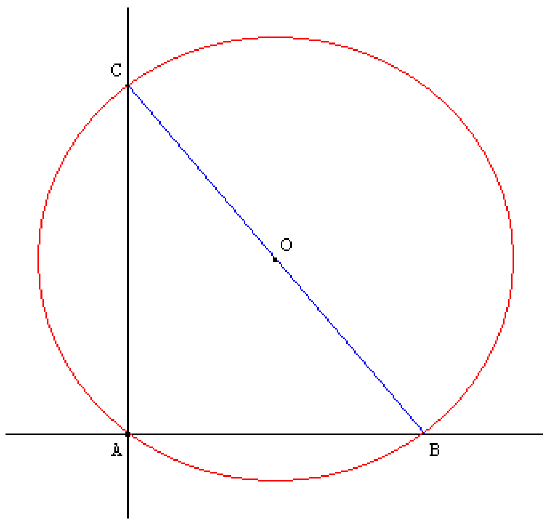
Dans la figure de gauche ci-dessus, AMB est un triangle isocèle : la hauteur (AH) est aussi la médiane. Il est donc aussi possible de tracer les milieux A’ de [MB] et B’ de [MA]. Les deux médianes [AA’] et [BB’] se coupent au centre de gravité G. La troisième médiane (AG) est la perpendiculaire cherchée. 5. Perpendiculaire élevée d'un point A à une droite (*d*)

Tracé d'une médiatrice

Soit une droite (d) et un point A sur (d).
Un cercle de centre A rencontre (d) en B et C.
Tracer la médiatrice de [BC] grâce aux cercles de centre A passant par B et de centre B passant par A.
Ces deux cercles se coupent en M et N.La perpendiculaire est la droite (MN).



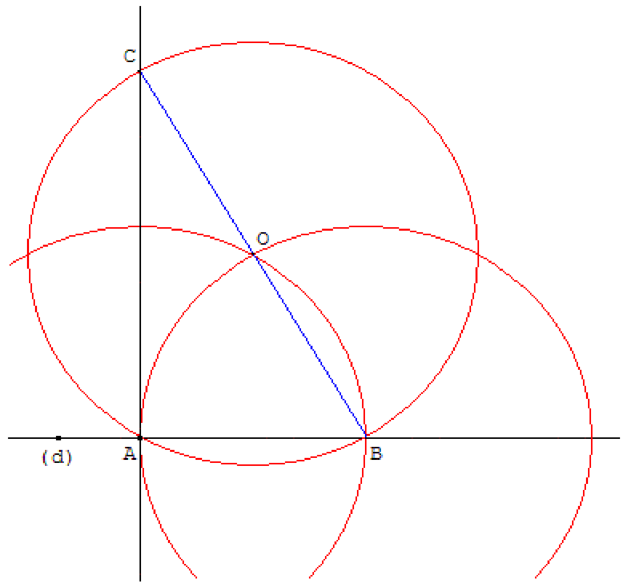
Tracé d'un cercle



Soit une droite (*d*) et un point A sur (*d*).
À partir d'un point O hors de (*d*), tracer un cercle de centre O passant par A. Si O n'est pas sur la perpendiculaire, il recoupe (*d*) en un deuxième point B. Tracer la droite (OB) qui recoupe le cercle en M. Le point M, symétrique de B par rapport à O, est diamétralement opposé à B.
La droite (AM) est perpendiculaire à (*d*).

Explications : Le triangle BAM, inscrit dans un demi-cercle, est rectangle en A.

Traçage d'une perpendiculaire en bout



Tracer un cercle de centre A qui rencontre (*d*) en B, puis avec le même rayon, un cercle de centre B passant par A, qui rencontre le premier cercle en O.
Tracer le point M, symétrique de B par rapport à O.
La perpendiculaire à (*d*) est (AM).

Explications : toujours avec le même rayon AO, tracer un troisième cercle de centre O passant par A et B, le deuxième point d'intersection de ce dernier cercle et de la droite (BO) est le point M.
Le triangle BAM inscrit dans un demi-cercle est rectangle en A.

Figure 3 (ci-dessus à droite)

Autre point de vue : perpendiculaire abaissé et droite des milieux

À partir d'un point O hors de (*d*), avec un cercle de centre O passant par A, on retrouve alors le tracé

de la perpendiculaire (OH) abaissée d'un point O.
Tracer le point M, symétrique de B par rapport à O.
Le théorème des milieux permet de justifier la construction : dans le triangle ABM, (OH) est la droite des milieux : (AM) est parallèle à (OH).
(OH) est perpendiculaire à (*d*), donc (AM) est perpendiculaire à (*d*).

6. Parallèle à une droite passant par un point donné

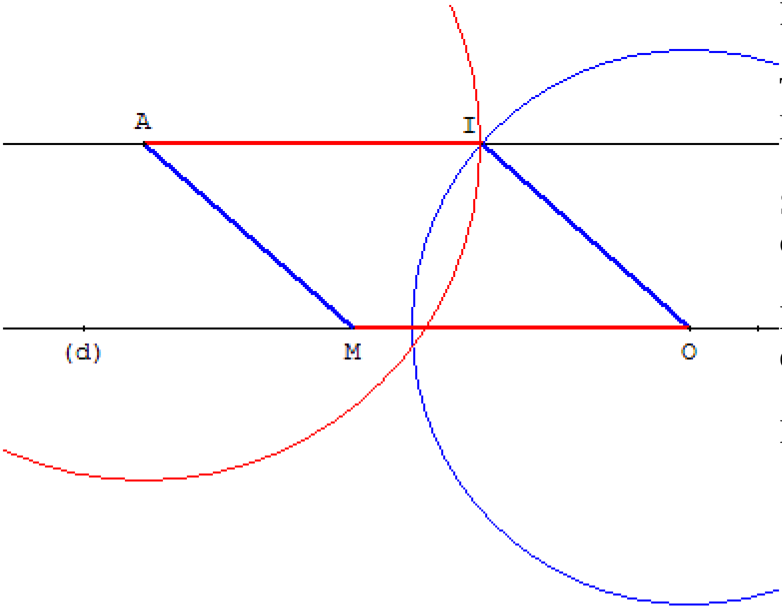
Proposition 31 du livre I des éléments d'Euclide : par un point donné, construire une ligne parallèle à une droite donnée.

L'unicité se déduit du postulat 5 : si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs d'un même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Ce postulat est par la suite plus souvent énoncé sous la forme : «Par un point il passe une et une seule parallèle à une droite donnée».

Construction au compas de la parallèle à une droite (d) passant par un point A :

a. Construction de deux cercles



Placer deux points M et O sur la droite (*d*).

Tracer le cercle de centre O de rayon AM et le cercle de centre A de rayon MO.

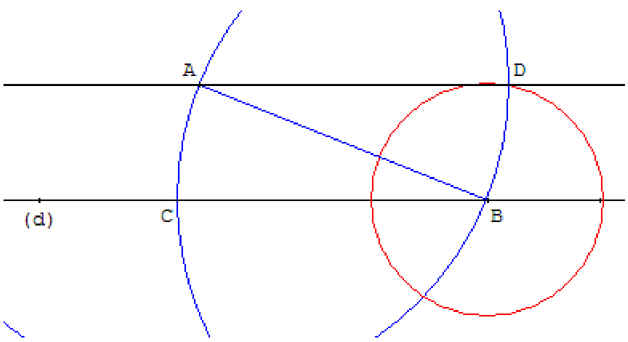
Soit I un des points d'intersection des deux cercles convenablement choisis.

Le quadrilatère AMOI a ses opposés égaux deux à deux. C'est un parallélogramme.

La droite (AI) est parallèle à (*d*).

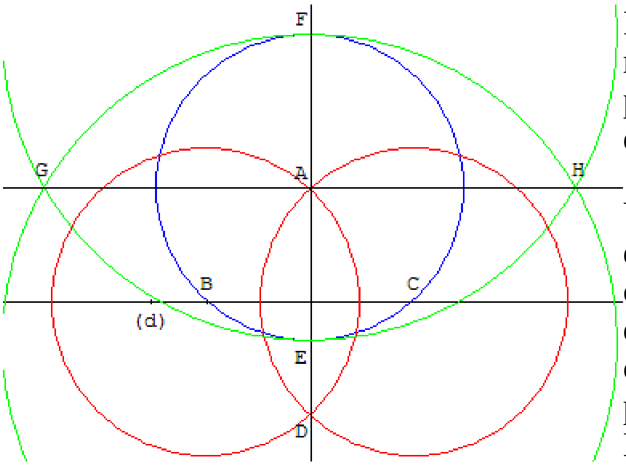
b. Angles alternes-internes

La droite (BC) = (*d*) et la parallèle (AD) cherchée doivent faire avec une sécante (AB) des angles alternes-internes ABC et BAD égaux entre eux :



Tracer le cercle (c_1) de centre A passant par un point B de la droite (*d*) et le cercle (c_2) de centre B passant par A. Le cercle (c_2) coupe cette droite en C.
Le cercle (c_3) de centre B et de rayon AC coupe le cercle (c_2) en un point D situé du même côté que A par rapport à (*d*).

La droite (AD) est la parallèle cherchée.



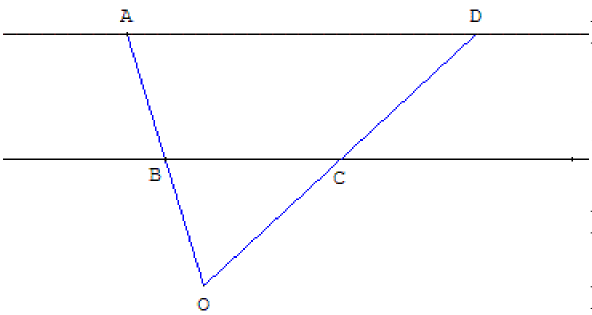
c. Deux médiatrices

Il est possible d'utiliser deux fois la construction de la médiatrice du paragraphe 1 pour tracer la perpendiculaire à (d) passant par le point A, puis d'élever en A la perpendiculaire à cette droite :

Un cercle (c_1) de centre A passant par un point B de la droite (d) recoupe cette droite en C. Les cercles de centre B et C passant par A se recoupent en D et la droite (AD) est perpendiculaire à (d). Le cercle (c_1) coupe (AD) en E et F. Les cercles de centre E passant par F et de centre F passant par E se coupent en G et H. La droite (GH) est la parallèle à (d) passant par A.

d. Droite des milieux

Classe de quatrième



Placer deux points B et C sur la droite (d).

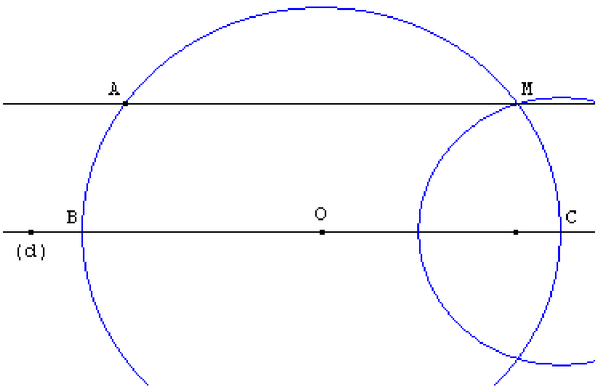
Sur la droite (AB), placer le point O tel que BO = AB,
Sur la droite (OC), placer le point D tel que CD = OC.

La droite (AD) est la parallèle à (d) cherchée.

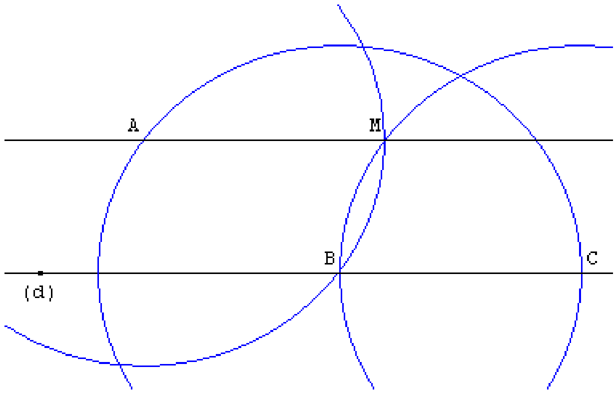
En effet (BC) est la droite des milieux du triangle OAD :

(AD) est parallèle à (BC).

e. Construction avec deux ou trois cercles



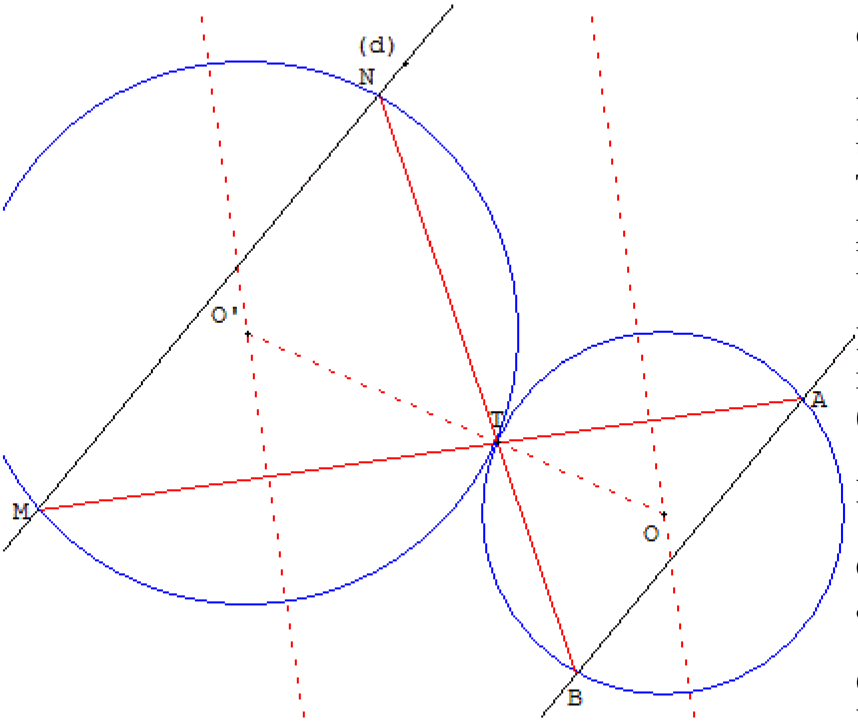
O étant un point libre de la droite (*d*), le cercle (*c*) de centre O passant par A coupe la droite (*d*) en B et C. Mesurer avec le compas la longueur AB et tracer le cercle de centre C et de rayon AB. Ce dernier cercle rencontre (*c*) en M situé dans le même demi-plan que le point A par rapport à (*d*).
La droite (AM) est parallèle à (*d*).



Tracer trois cercles de même rayon.
Le premier de centre A rencontre (*d*) en B.
Le deuxième de centre B rencontre (*d*) en C.
Le troisième de centre C, rencontre le premier en M.

La droite (AM) est parallèle à (*d*).

f. Construction avec deux cercles tangents



Utiliser la configuration des cordes de cercles tangents :

Placer un point M sur la droite (*d*) et un point T sur le segment [AM].
Tracer deux cercles tangents en T passant par A pour l'un, par M pour l'autre.

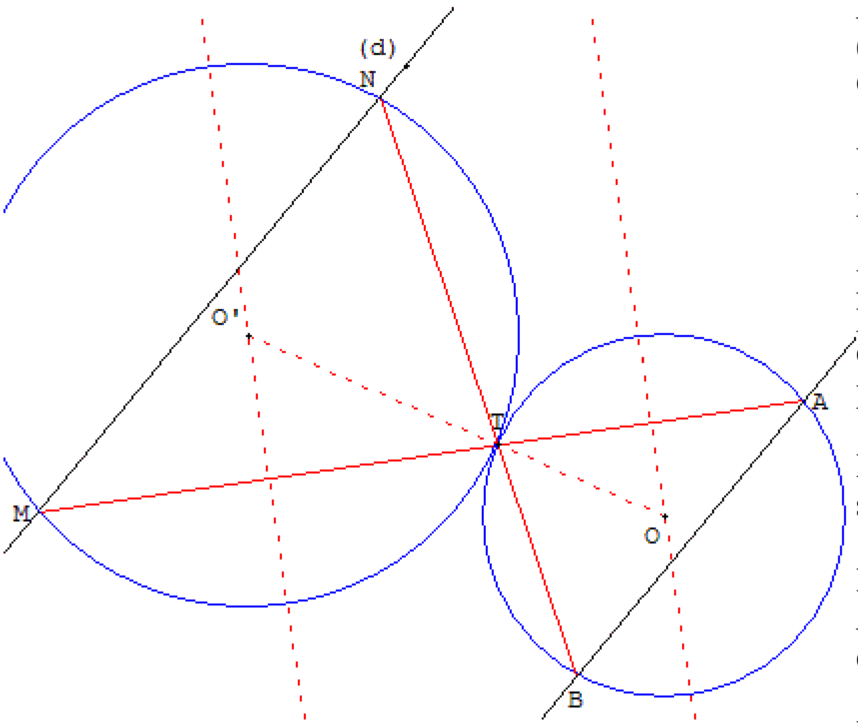
Pour cela placer un point O sur la médiatrice de [AT] et tracer le cercle (*c*) de centre O passant par A et T.

La droite (OT) coupe la médiatrice de [MT] en O'. Le cercle (c') de centre O' passant par T et M est tangent en T au cercle (c).

Ce cercle recoupe la droite (*d*) en N.
La droite (TN) recoupe le cercle (*c*) en B.

La droite (AB) est la parallèle à (*d*) passant par A.

7. Parallèle à une droite (D) située à une distance donnée d



À partir d'un point A de la droite (*D*), tracer un cercle (*c*) de rayon *d*. Ce cercle coupe la droite en B et C.

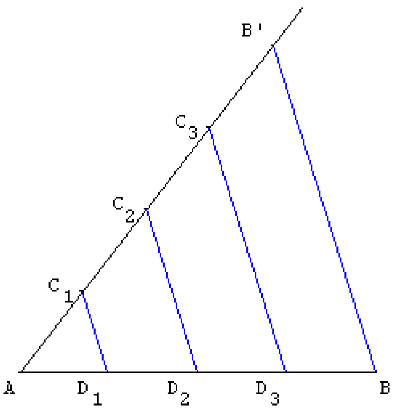
Utiliser la méthode du paragraphe 5 pour construire la médiatrice de [BC] grâce aux cercles de centre B passant par C et de centre C passant par B. Ces deux cercles se coupent en M et N. La droite (MN) est perpendiculaire en A à (*D*).

Le cercle (*c*) coupe (MN) au point D situé à une distance *d* de A.

Les cercles de rayon *d*, passant par A, centrés en B et en D se coupent en E.

La droite (DE) est parallèle à la droite (*D*) et située à la distance *d*.

8. Division d'un segment en parties égales

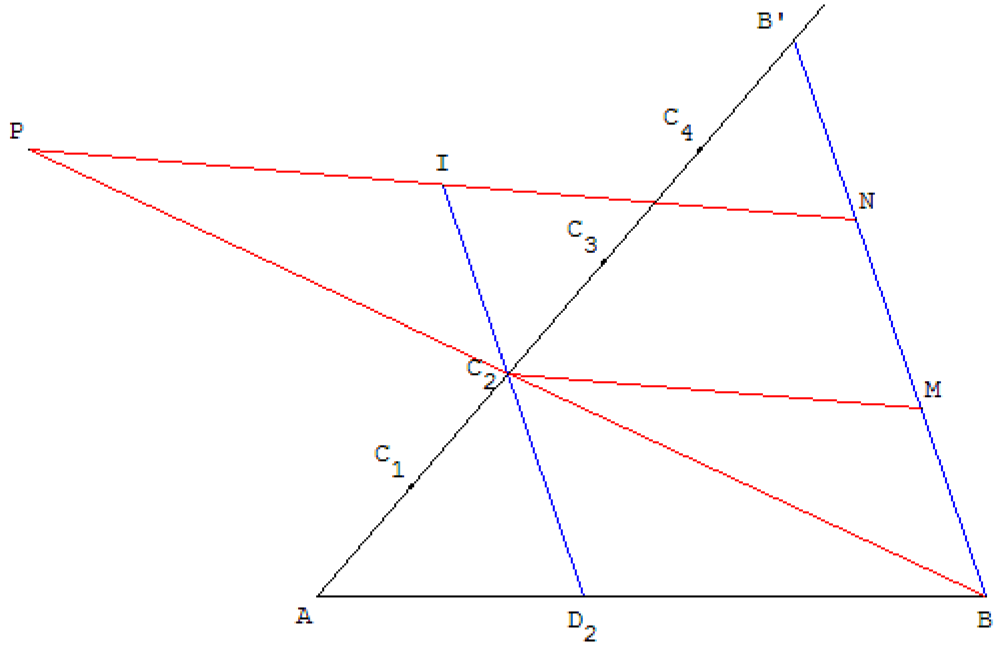


Cet exercice repose sur la propriété de Thalès, mais peut être utilisé avant de l'avoir justifiée.

Pour partager un segment [AB] en *n* parties égales, tracer sur demi-droite issue de A *n* segments égaux [AC_1], [C_1C_2], ..., [C_{n-1}B’]. Tracer le segment [BB’] et les parallèles à (BB’) passant par C_1, C_2, ..., C_{n-1}.

Elles découpent [AB] en *n* parties égales.

Construction d'une des parallèles à la règle et au compas



Pour trouver avec précision une des divisions sur le segment, par exemple ici le point D_2, utiliser la construction suivante :

Placer, comme ci-contre, *n* points sur [AB'].
Placer deux points M et N sur [BB'] tel que BM = MN.

Tracer le symétrique P de B par rapport à C_2, puis le milieu I de [PN].

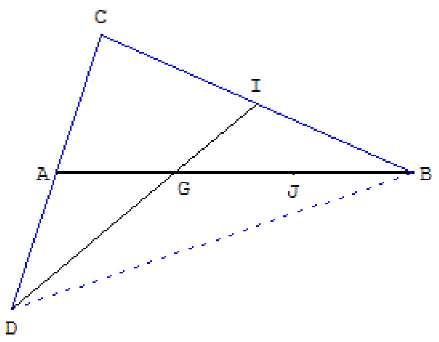
La droite (IC_2) coupe (AB) en D_2 situé aux 2 $n^{\text{ième}}$ de [AB].

On montre facilement que (C_2D_2) est parallèle à (BB') comme droite des milieux du triangle BPN.

Extrait de : Salles-Le Gac Danielle et Herrera Ruben Rodriguez - Nouvelles pratiques de la géométrie - IREM Caen - 2008

9. Partage d'un segment en trois

Tracé de médianes



Partager un segment [AB] en trois.

Placer un point I à l'extérieur de (AB).

Sur la droite (BI) reporter la longueur BI et placer le point C tel que IC = BI.

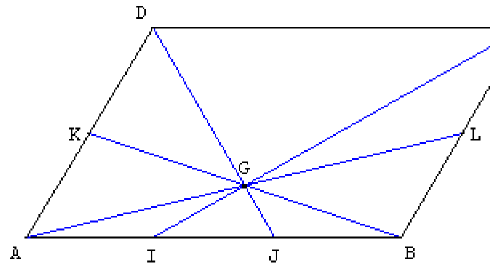
Sur la droite (CA), reporter la longueur CA et placer le point D tel que AD = CA.

La droite (DI) coupe (AB) en G. Le point G est au tiers de [AB]. En reportant la longueur AG sur (AB) on trouve le point J milieu de [GB].

Le point J est au $\frac{2}{3}$ de [AB] à partir de A.

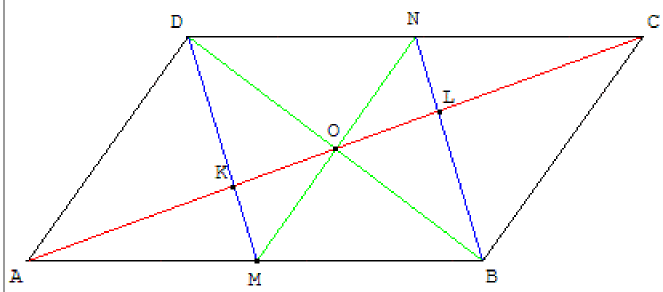
En effet G, point d'intersection des médianes, est le centre de gravité de BCD.

Partage du côté d'un parallélogramme



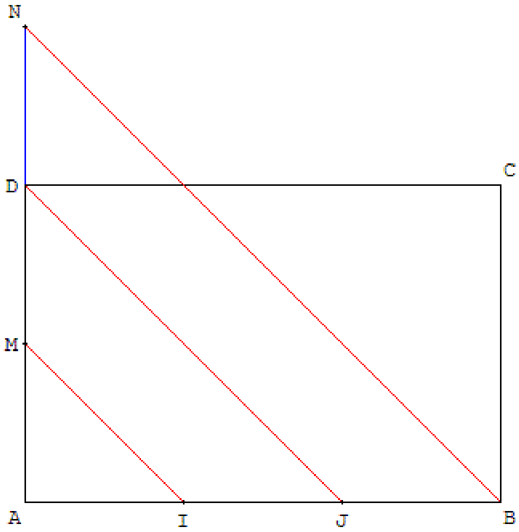
On considère un parallélogramme ABCD. K est le milieu de [AD], L le milieu de [BC]. Les diagonales du parallélogramme ABLK se coupent en G.
Les droites (CG) et (DG) déterminent sur le côté [AB] deux points I et J qui le partagent en trois parties égales.

Partage de la diagonale d'un parallélogramme



Dans un parallélogramme, les segments, joignant deux sommets opposés aux milieux des côtés opposés, sont parallèles et partagent la diagonale joignant les deux autres sommets en trois parties égales.

Tracé de parallèles dans un rectangle



Partager un segment [AB] en trois.

Il est aussi possible de faire cette construction qui sera justifiée par Thalès en quatrième :

Sur la perpendiculaire en B à (AB) placer un point C, puis terminer le rectangle ABCD.
Tracer le milieu M de [AD] et le symétrique N de M par rapport à D.
Les parallèles à (BN) passant par M et D coupent (AB) en I et J qui sont les points cherchés.