Épreuve pratique de terminale S
Sujets de géométrie plane

Banque de sujets de géométrie proposés en 2007 par ÉduSCOL. Figures réalisées avec GéoPlan.

Sommaire

2. Recherche d'un lieu géométrique
3. Évacuation des eaux
11. Lieu de l'orthocentre
12. L'équerre contre un mur
21. Équation différentielle et méthode d'Euler
27. Aire maximale d'un triangle isocèle de périmètre fixé
30. Famille de cercles
31. Tangentes à une parabole
47. Partage d'un triangle

Faire des maths … avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Document Word : http://www.debart.fr/doc/epreuve_pratique_TS.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/epreuve_pratique_TS.pdf
Document HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/ts/epreuve_pratique.html

Page n° 108, réalisée le 1/4/2007, mise à jour le 24/4/2007

Expérimentation 2006-2007

Le groupe de mathématiques de l'Inspection générale expérimente, pendant l'année scolaire 2006/2007, la mise en place d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S.

Objectifs et projet d'organisation de cette épreuve

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer les compétences des élèves dans l'utilisation des calculatrices et de certains logiciels spécifiques en mathématiques, il s'agit d'évaluer chez les élèves, la capacité à mobiliser les TICE pour résoudre un problème mathématique

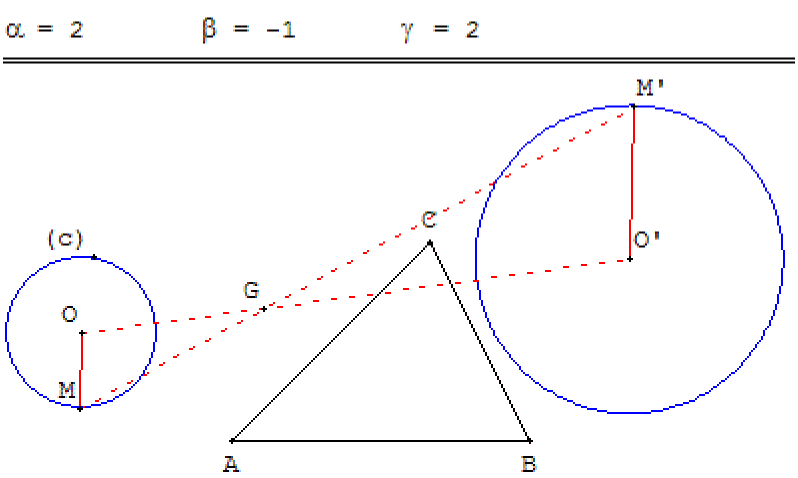
Les sujets proposés aux candidats sont des exercices mathématiques où l'utilisation des TICE (calculatrice graphique programmable, ordinateurs et logiciels spécifiques, logiciels libres de préférence, tableurs, grapheur tableur, géométrie dynamique, calcul formel) intervient de manière significative dans la résolution du problème posé.

Une banque de sujets est élaborée au niveau national. Chaque sujet est composé :

- d'une description destinée à alimenter la liste nationale de situations d'évaluation ;
- d'une "fiche élève" donnant l'énoncé et précisant de qui est attendu du candidat ;
- d'une "fiche professeur" décrivant les intentions de l'auteur, des considérations sur l'environnement TICE du sujet et des commentaires sur l'évaluation ;
- d'une "fiche évaluation" destinée à figurer dans le dossier du candidat.

L'épreuve se déroule au sein des lycées fréquentés par les élèves. Chaque établissement choisit, dans cette banque les sujets qui seront proposés aux élèves de l'établissement ; ce choix est guidé par les équipements disponibles et les enseignements assurés par le professeur.

2. Recherche d'un lieu géométrique



Dans le plan (P), on donne quatre points O, A, B et C et un cercle (Γ) de centre O. Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ).

On lui associe l'unique point M' du plan (P) défini par l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}$ où α, β, γ sont des réels donnés.

1. Il s'agit de déterminer, dans un cas particulier, le lieu géométrique (L) du point M' lorsque le point M décrit le cercle (Γ).

- À l'aide d'un logiciel de géométrie plane construire les points O, A, B et C, le cercle (Γ) et un point libre M sur ce cercle.
  Construire le point M' associé à M.
- En observant plusieurs positions du point M faire une conjecture sur la nature de la transformation du plan qui transforme M en M' ainsi que la nature du lieu géométrique du point M'.

2. (a) Déterminer par le calcul la nature de la transformation du plan qui transforme le point M en le point M'.
(b) Déterminer le lieu géométrique (L) du point M'.

Production demandée

- La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- Le calcul permettant d'obtenir la nature de la transformation.
- La caractérisation du lieu géométrique de M' et sa justification.

Compétences mathématiques

– Utiliser la notion de barycentre et ses propriétés ;
– Utiliser les transformations géométriques usuelles.

3. Évacuation des eaux

Environnement informatique

- Logiciel de géométrie dynamique.
- Type d'utilisation : par les élèves en salle informatique.
- Matériel : un ordinateur par élève.

Objectifs et moyens possibles

- Objectifs : entraînement à l'épreuve pratique du bac S.
- Moyens : contrôle intermédiaire et final du travail de l'élève.

Prérequis informatiques

- Utilisation élémentaire de GéoPlan.

Prérequis mathématiques

- Trigonométrie et fonction.

Compétences TICE

- Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
- Tester les conjectures émises ;
- Traduire, à l'aide du logiciel, une situation géométrique par un graphique.

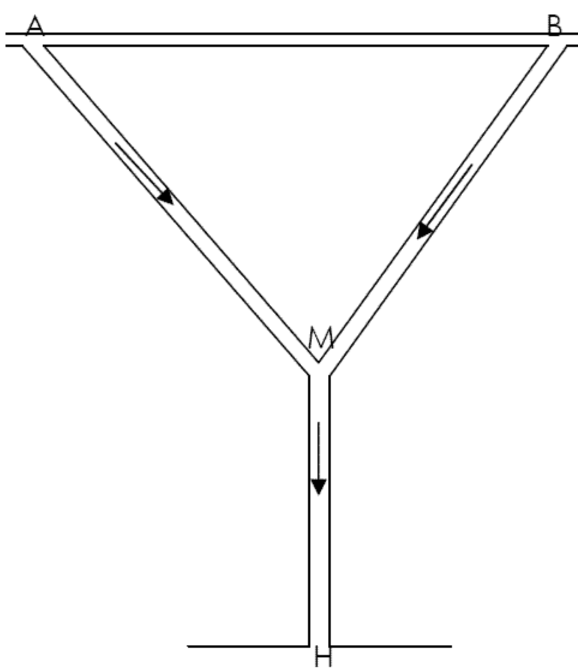
Compétences mathématiques

- Émettre une conjecture en croisant des informations variées : observation d'une figure dynamique, données numériques et graphiques ;
- Élaborer une stratégie permettant de déterminer l'extremum d'une fonction.

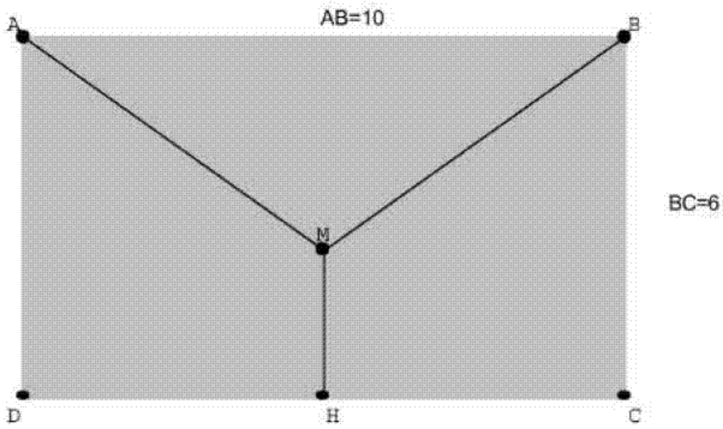
Situation

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur aveugle, à l'arrière de la façade d'une maison.
Sur ce mur, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

La figure ci-dessous est un schéma d'un système d'écoulement des eaux :



On le schématise par la figure suivante, où les distances sont exprimées en mètres :



Sur ce plan, (MH) est la médiatrice de [DC].
Il s'agit de trouver, sur le mur de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.

On note Q la projection de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu BMQ = θ.

Travail demandé

1. À l'aide du logiciel GéoPlan, ouvrir la figure «*Optimisation.g2w*». Elle comprend le repère de base ainsi qu'un second repère de centre I.
Construire le rectangle ABCD, puis définir la médiatrice de [DC] ainsi que le point libre M sur cette droite.
Définir la variable numérique *s* égale à la somme MA + MB + MH ainsi que *e* égale à la valeur en radian de l'angle BMQ, puis l'affichage de ces deux valeurs.

(Facultatif) : Représenter dans le repère d'origine I le point S d'abscisse *e* en choisissant des coordonnées adaptées.

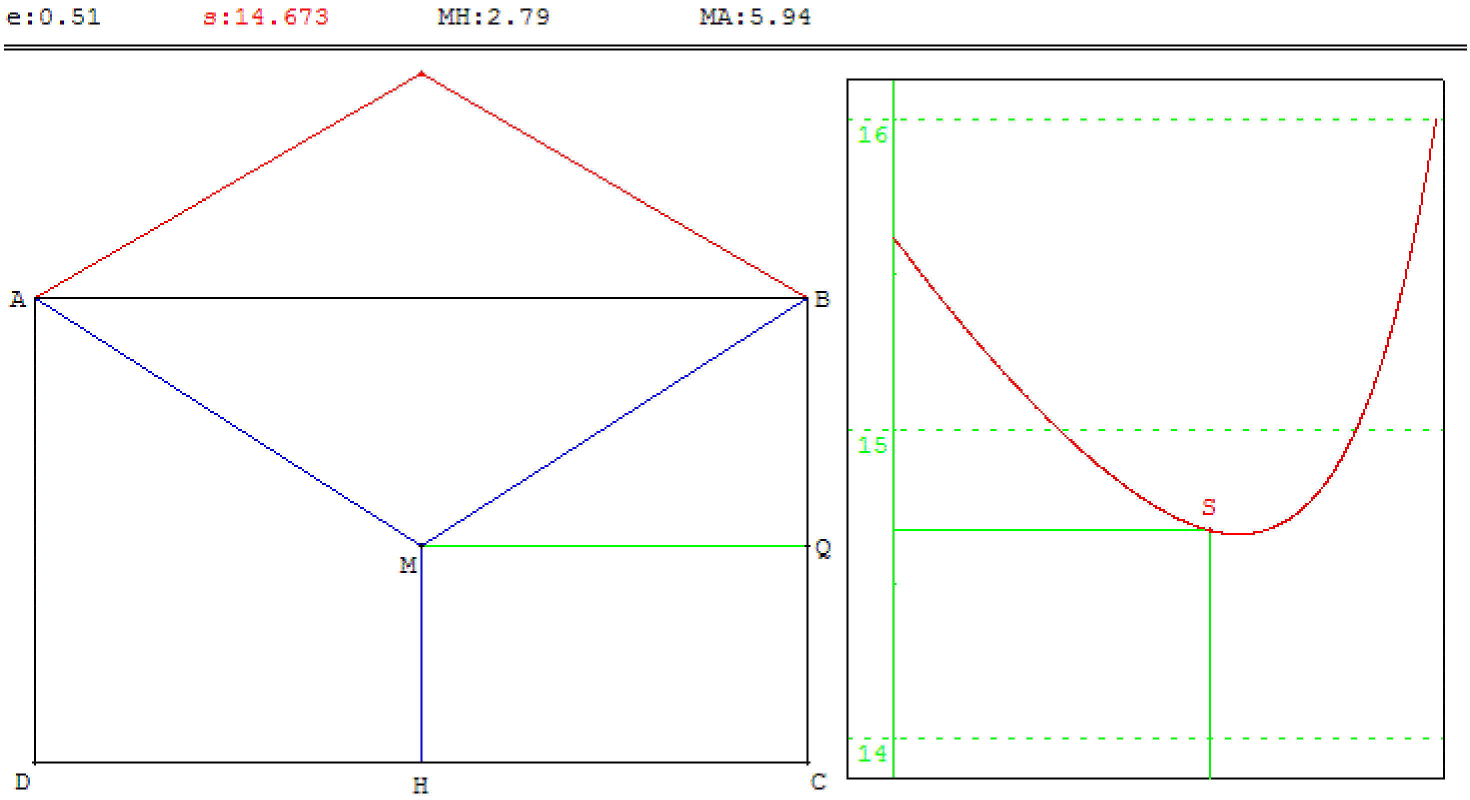
À l'aide de la figure ainsi conçue, déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle BMQ en radian qui donne une somme *s* minimale, ainsi que la valeur approchée de cette somme.

2. On définit la fonction $g : \theta \rightarrow g(\theta) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) on note *g'* la dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta) = 5 \times \frac{2\sin\theta - 1}{(\cos\theta)^2}$.
(b) déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Figure avec GéoPlan

Une possibilité de représentation est donnée par la figure ci-dessous :



Indications

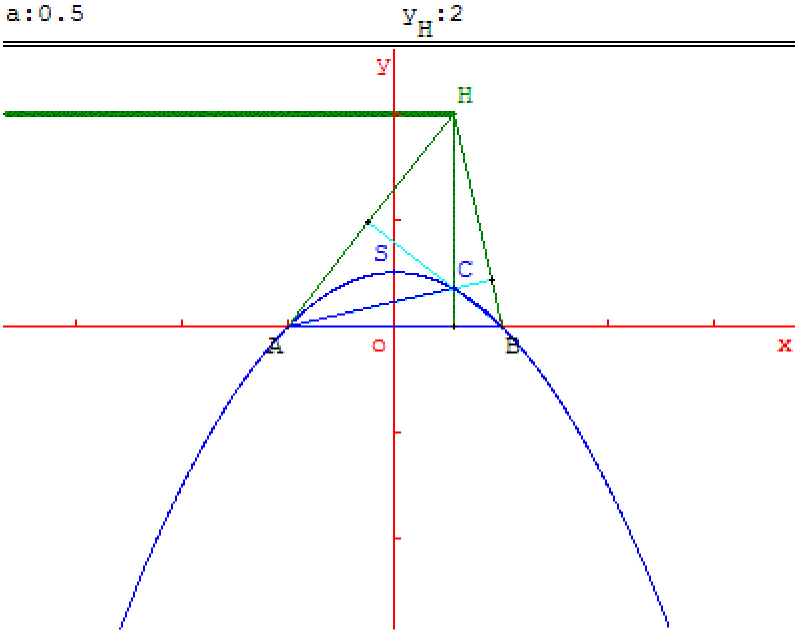
MQ = MB cos θ, d'où MA = MB = $\dfrac{MQ}{\cos\theta} = \dfrac{5}{\cos\theta}$

BQ/MQ = tan θ, d'où BQ = MQ tan θ = 5 tan θ ; MH = QC = BC - BQ = 6 - 5 tan θ.

$g(\theta) = 2\text{MA} + \text{MH} = \dfrac{10}{\cos\theta} + 6 - 5\tan\theta = \dfrac{10+6\cos\theta-5\sin\theta}{\cos\theta}$.

La dérivée g' est nulle si 2 sin θ -1 = 0 ; sin θ = $\dfrac{1}{2}$; θ = $\dfrac{\pi}{6}$. $g(\theta) = 5\sqrt{3} + 6 \approx 14{,}66$.

13. Lieu de l'orthocentre



Recherche du lieu de l'orthocentre d'un triangle lorsque l'un des sommets se déplace sur une droite.

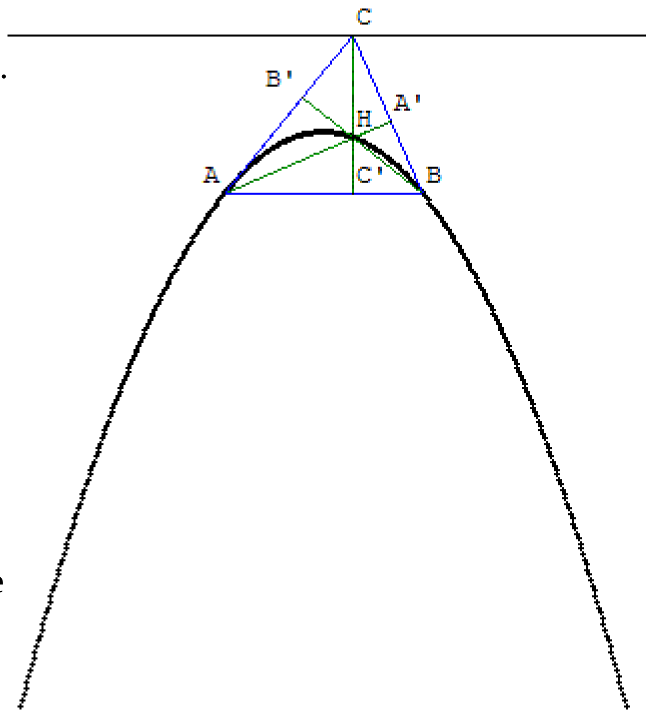
Dans le plan, ABC est un triangle d'orthocentre H.
Il s'agit de déterminer le lieu L des points H quand C se déplace sur une certaine droite.

a. La droite est parallèle au côté opposé à ce sommet.

Si (*d*) est une droite parallèle à (AB), distincte de (AB), le lieu de l'orthocentre H, quand le sommet C parcourt la droite (*d*), est une courbe passant par A et B. Cette courbe est symétrique par rapport à la médiatrice de [AB]. On va montrer que c'est une parabole.

En géométrie analytique utilisons un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) centré en O milieu de [AB] tel que :
$\vec{i} = \overrightarrow{OB}$ et que $\vec{j}$ soit un vecteur directeur de la médiatrice de [AB].

Les coordonnées des points sont alors A(-1, 0) ; B(1, 0) ; C(*x*, γ) et H(*x*, *y*) car H étant l'orthocentre de ABC, C et H ont même abscisse *x*.



AH étant orthogonal à CB, le produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} = 0$.

Les coordonnées des vecteurs sont :
$\overrightarrow{AH}(1 + x, y)$; $\overrightarrow{CB}(1 - x, -\gamma)$.

On obtient finalement avec la formule analytique du produit scalaire :

$$XX' + YY' = (1 + x)(1 - x) - \gamma y = 0,$$

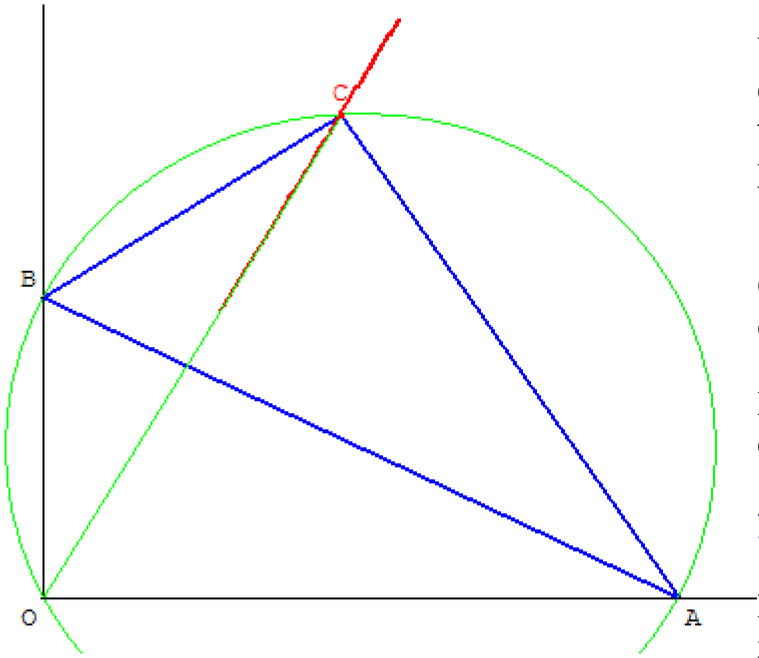
$$\text{soit } y = \frac{x^2+1}{\gamma} \qquad \gamma \neq 0.$$

Cette équation prouve que H se déplace sur une parabole passant par A et B et même que le lieu de H est toute la parabole, étant donné que *x* décrit **R**.

Réciproquement, comme l'orthocentre du triangle ABH est le point C on peut montrer que si C se déplace sur une parabole passant par A et B, d'axe de symétrie la médiatrice de [AB], alors le lieu de l'orthocentre est une droite parallèle à (AB).

12. L'équerre contre un mur

Classe de seconde



Une équerre ABC, rectangle en C, est placée de telle façon que le point A est un point variable du demi-axe des abscisses [O*x*) et le point B est sur le demi-axe des ordonnées [O*y*).

On déplace l'équerre en «*faisant glisser*» A et B sur les axes.

Montrer que le point C se déplace sur une droite issue du point O.

Indication

BCA et BOA sont deux triangles rectangles inscrits dans le cercle de diamètre [BA]. Les angles inscrits AOC et ABC dans ce cercle sont égaux. Le point C se trouve sur la droite fixe passant par O faisant un angle égal à ABC avec l'axe (O*x*).

Le lieu L des points est un segment porté par cette droite.

EduScol - Terminale S

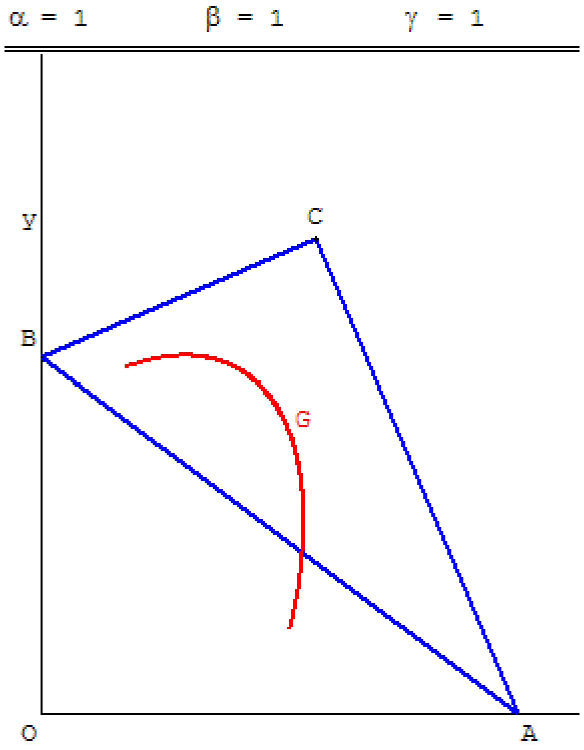
On s’intéresse à l´étude du lieu de certains points de l’équerre lorsque l'on déplace les points A et B, en particulier au milieu I de [AC].

Technique GéoPlan

Le point A étant placé sur (O*x*), le point B est l'intersection de l'axe (O*y*) avec le cercle de centre A et de rayon égal à la longueur *l* de l'équerre. Le point C est situé sur le cercle de diamètre [AB].
Si l'équerre est définie par son angle en Â, avec GéoPlan, le plus simple est de construire le point C comme image de B par une similitude de centre A et rapport cos(Â).

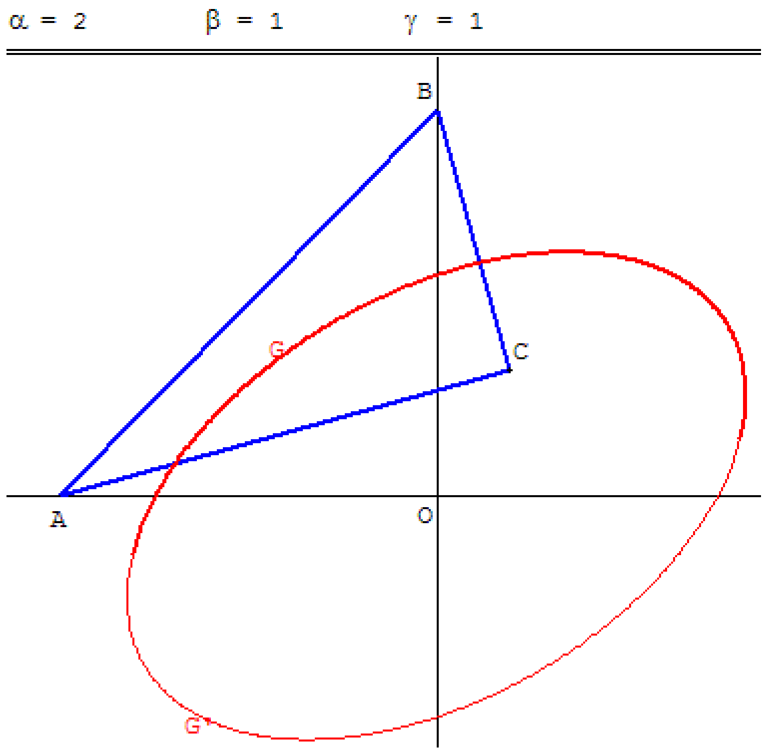
Le point G de l'équerre dont on cherche le lieu est défini comme barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) et (C, γ) où les coefficients α, β ou γ sont positifs.

Quel est le lieu du point G, situé sur l'équerre ?



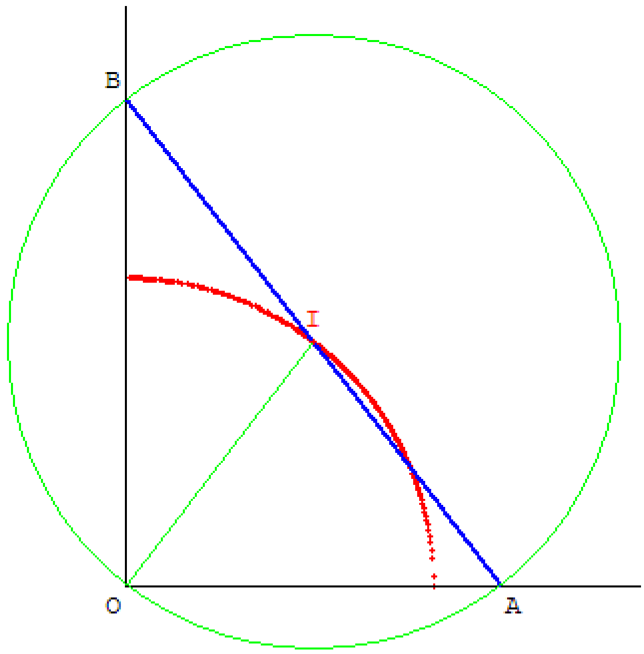
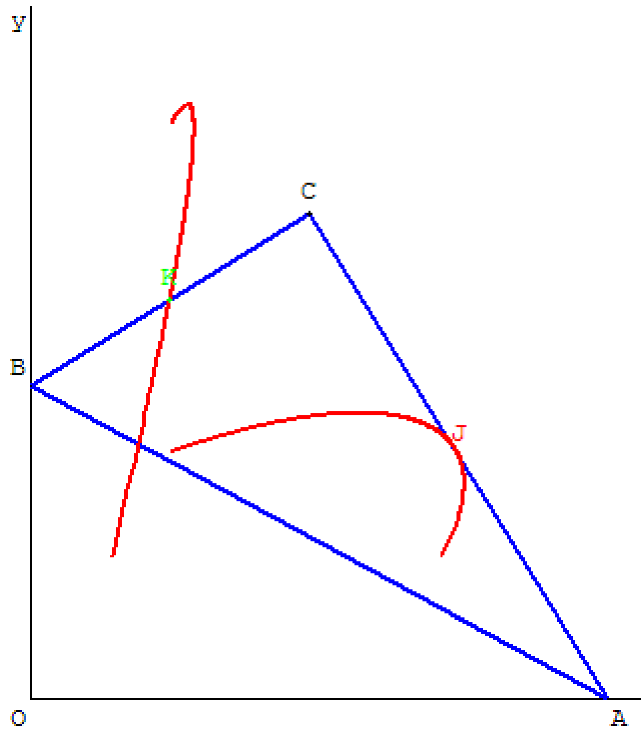
Un arc de conique ?

A glisse sur la droite (Ox), B glisse sur (Oy)



On fait varier A dans un intervalle de longueur 2*l* autour de O.
On obtient une demi-ellipse tracée en gras.
On fait aussi glisser B sur [O*y*') en B' et on obtient un point G' qui se déplace sur l'autre demi-ellipse (trace fine).

Le point G se déplace sur une ellipse.

Déplacement du milieu d'une échelle glissant contre un mur vertical	**Points sur les côtés de l'équerre**
Classe de quatrième  Ce quart de cercle correspond au cas $\alpha = \beta > 0$ et $\gamma = 0$ de la figure page précédente. En modifiant α ou β, avec $\gamma = 0$, on trouve un quart d'ellipse comme lieu d'un point G situé sur le côté [AB].	Quels sont les lieux des milieux J et K des côtés de l'équerre ?  Les lieux sont des arcs d'ellipses.

Compétences évaluées

Compétences mathématiques

- Cercle circonscrit à un triangle rectangle.

Compétences TICE

– Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
– Visualiser un lieu ;
– Tester les conjectures émises.

Compétences mathématiques

– Exploiter les propriétés du triangle rectangle ;
– Utiliser les lignes trigonométriques dans un triangle ?

21. Équation différentielle et méthode d'Euler

Le but de l'exercice est de mettre en oeuvre la méthode d'Euler pour une équation différentielle de type $y' = ay$ (où a est un réel donné) et d'en déduire une valeur approchée.

Compétences évaluées

Compétences TICE

– Utiliser un tableur, notamment ses fonctions graphiques ;
– Réaliser une feuille de calcul adaptée à la situation.

Compétences mathématiques

– Mettre en oeuvre les connaissances sur la méthode d'Euler ;
– Déterminer la primitive d'une fonction, avec condition initiale ;
– Faire le lien entre la fonction approchée obtenue par la méthode d'Euler et la primitive : évaluer une précision.

26. Barycentre

Situation

On considère A, B et C trois points non alignés du plan et k un réel de l'intervalle [-1; 1].
On note G_k le barycentre du système de points pondérés : $\{(A, \alpha_k); (B, \beta_k); (C, \gamma_k)\}$

où α_k , β_k et γ_k sont des réels dépendant de k, de somme non nulle. Il s'agit de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle [-1; 1].

Fiche élève

On considère A, B et C trois points du plan et k un réel de l'intervalle [-1;1].
On note G_k le barycentre du système de points pondérés : $\{(A, k^2 + 1); (B, k); (C, -k)\}$

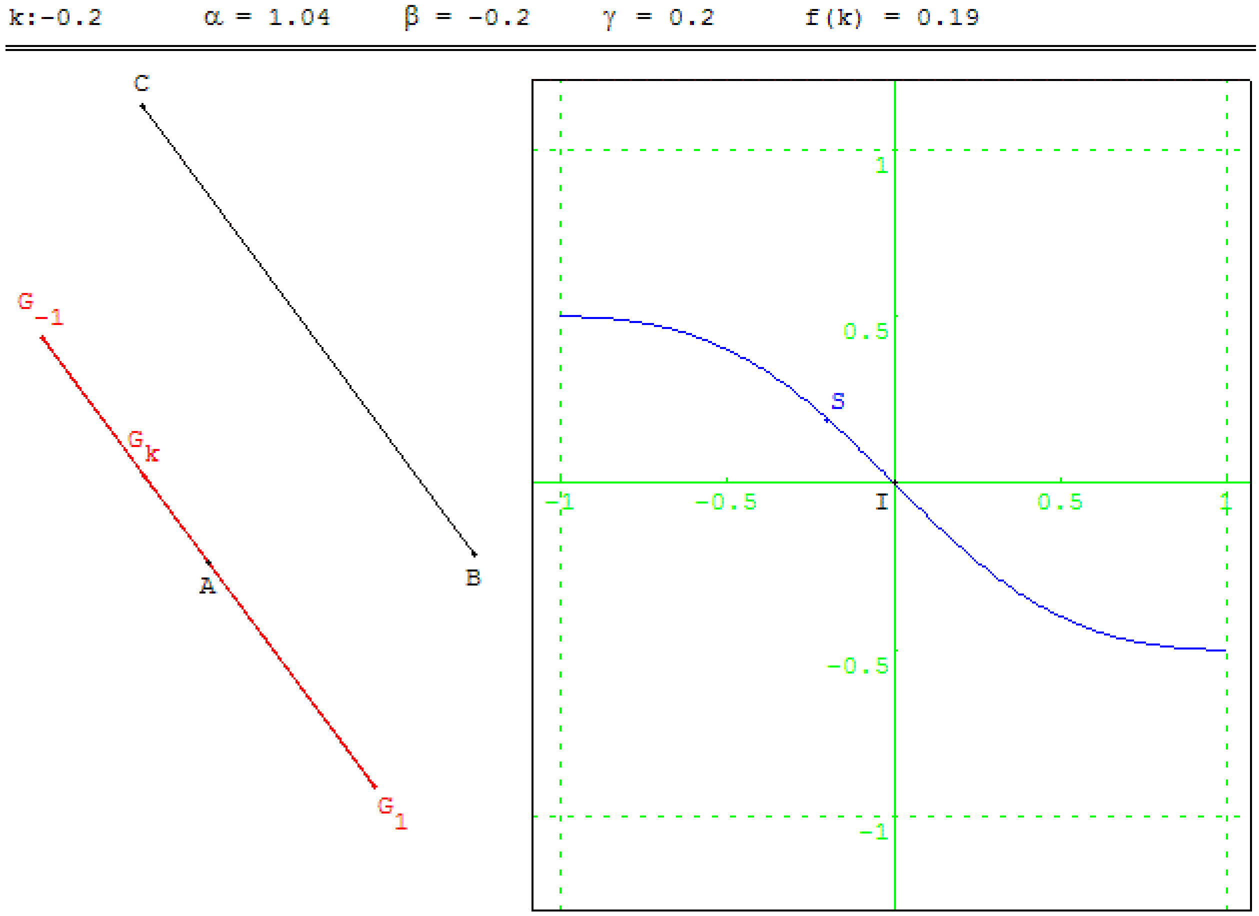
Le but de cet exercice est de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle [-1,1].

1. Visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie :

- Construire les points A, B, C, G_1 et G_{-1}.
- Construire le point G_k puis visualiser l'ensemble des points G_k lorsque k décrit [-1,1].
- Quelle est la nature de l'ensemble précédent ?

2. Justification mathématique :

- Justifier, pour tout réel k de [-1;1] l'existence du point G_k.
- Démontrer que pour tout réel de l'intervalle [-1;1], on a : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.
- Démontrer la conjecture faite avec le logiciel.
  On pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur [-1;1] par :
  $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$



Indications

D'après la fonction vectorielle de Leibniz $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG}$,
en plaçant M en A on a :
$(k^2 + 1)\,\overrightarrow{AG_k} = k\,\overrightarrow{MB} - k\,\overrightarrow{MC} = -\,k\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\,\overrightarrow{BC}$.

La fonction f est continue et décroissante sur [-1; 1].

27. Aire maximale d'un triangle isocèle de périmètre fixé

On considère un triangle ABC isocèle en A de périmètre fixé.
Le but de cet exercice est de déterminer parmi tous les triangles isocèles possibles celui dont l'aire est maximale.

1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie :

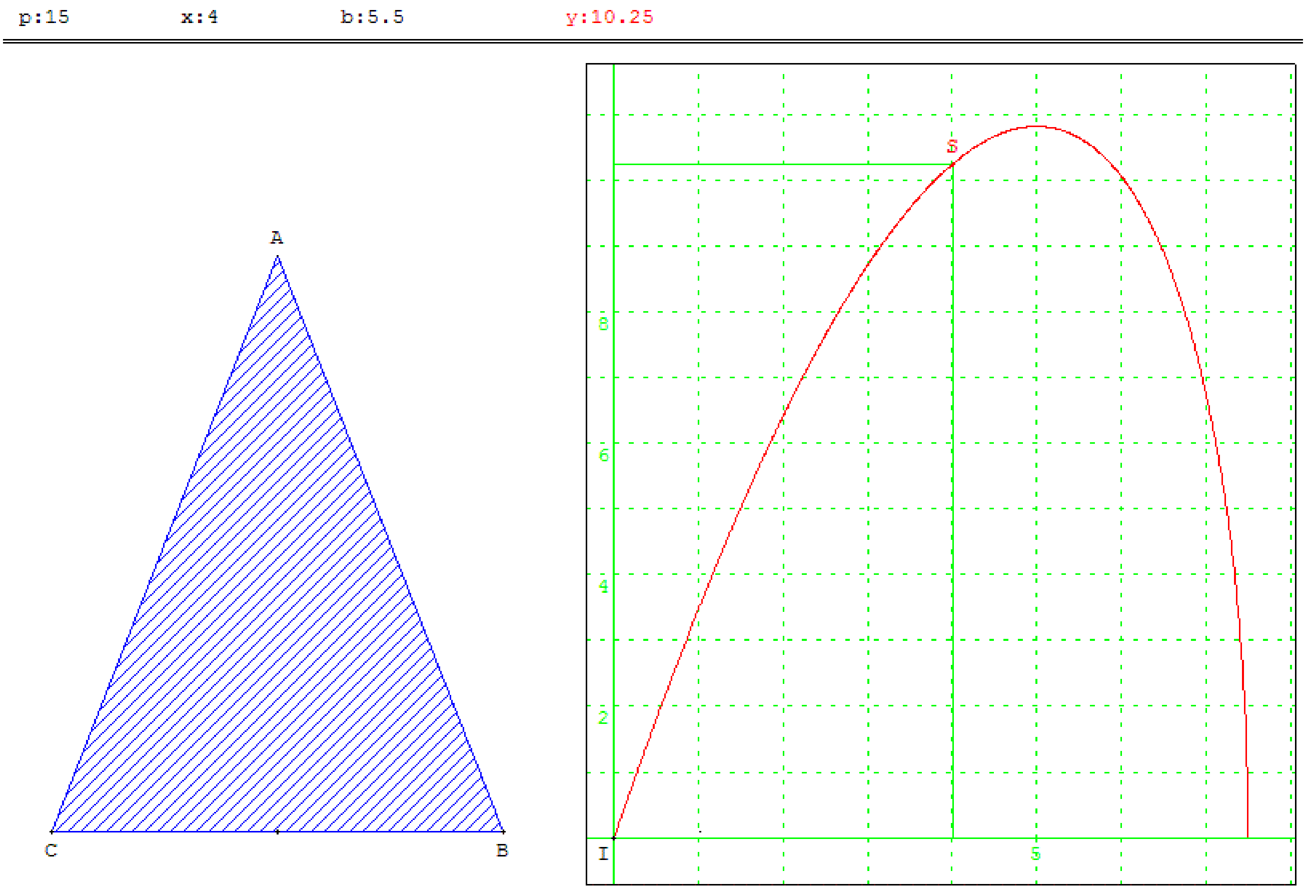
- A l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et exactement égal à 15.
- Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?

2. Démonstration :

On note x la longueur BC et A(x) l'aire de ABC.

- Dans quel intervalle le réel x peut-il prendre ses valeurs ?

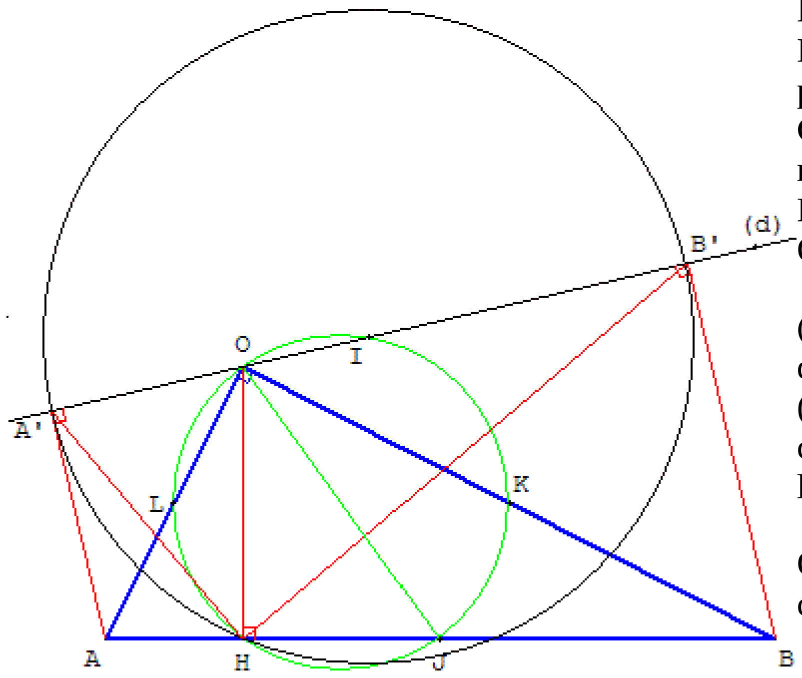
- Soit H le milieu de [BC], exprimer AH en fonction de x et en déduire que $A(x) = \dfrac{x\sqrt{225-30x}}{4}$.
- Résoudre le problème posé.



Si $p = 15$, $x = \text{BC} = a$, $\text{AB} = \text{AC} = b$, $Aire(\text{ABC}) = y$; dans le cadre de droite est représenté le point S(x, y).

En déplaçant le point B, on peut conjecturer que l'aire est maximale pour un triangle équilatéral

30. Famille de cercles



Dans le plan on considère un triangle BOA rectangle en O et une droite (*d*) passant par O.
On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et de B sur (*d*).
Enfin H est le pied de la hauteur issue de O dans OAB.

(a) Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.
(b) Quelle conjecture peut-on faire concernant les différents cercles (*c*) lorsque la droite (*d*) tourne autour de O ?

On considère la similitude directe S de centre H qui transforme A en O.

- Quel est l'angle de cette similitude ? Justifier que l'image de O par S est B.
- Déterminer les images par S des droites (AA') et (*d*) , puis celle du point A'.
- Démontrer la conjecture faite au (b).

Conjectures

Les cercles (c) passent par le point H pied de la hauteur issue de O du triangle BOA.

Dans le cercle de diamètre [OA], les angles inscrits OAH et OA'H sont égaux, de même dans le cercle de diamètre [OB], les angles inscrits OBH et OB'H sont égaux. Les triangles BOA et B'HA' sont semblables, donc B'HA' est un triangle rectangle en H inscrit dans le cercle de diamètre [A'B'] : (*c*) contient le point H.

Si J, K et L sont les milieux des côtés [AB], [OB] et [OA] les centres I des cercles (c) appartiennent au cercle de diamètre la médiane [OJ] (cercle passant par K et L).

En effet dans le cercle (*c*) l'angle au centre A'IH est la moitié de l'angle inscrit A'B'H. De même dans le cercle de diamètre [AB] l'angle au centre OJA est la moitié de l'angle inscrit OBA. Comme dit ci-dessus les angles inscrits A'B'H = OBA sont égaux, donc les angles doubles OIH et OJH sont égaux. Les points I, J, O et H sont cocycliques. Le point I est sur le cercle diamètre [OJ].

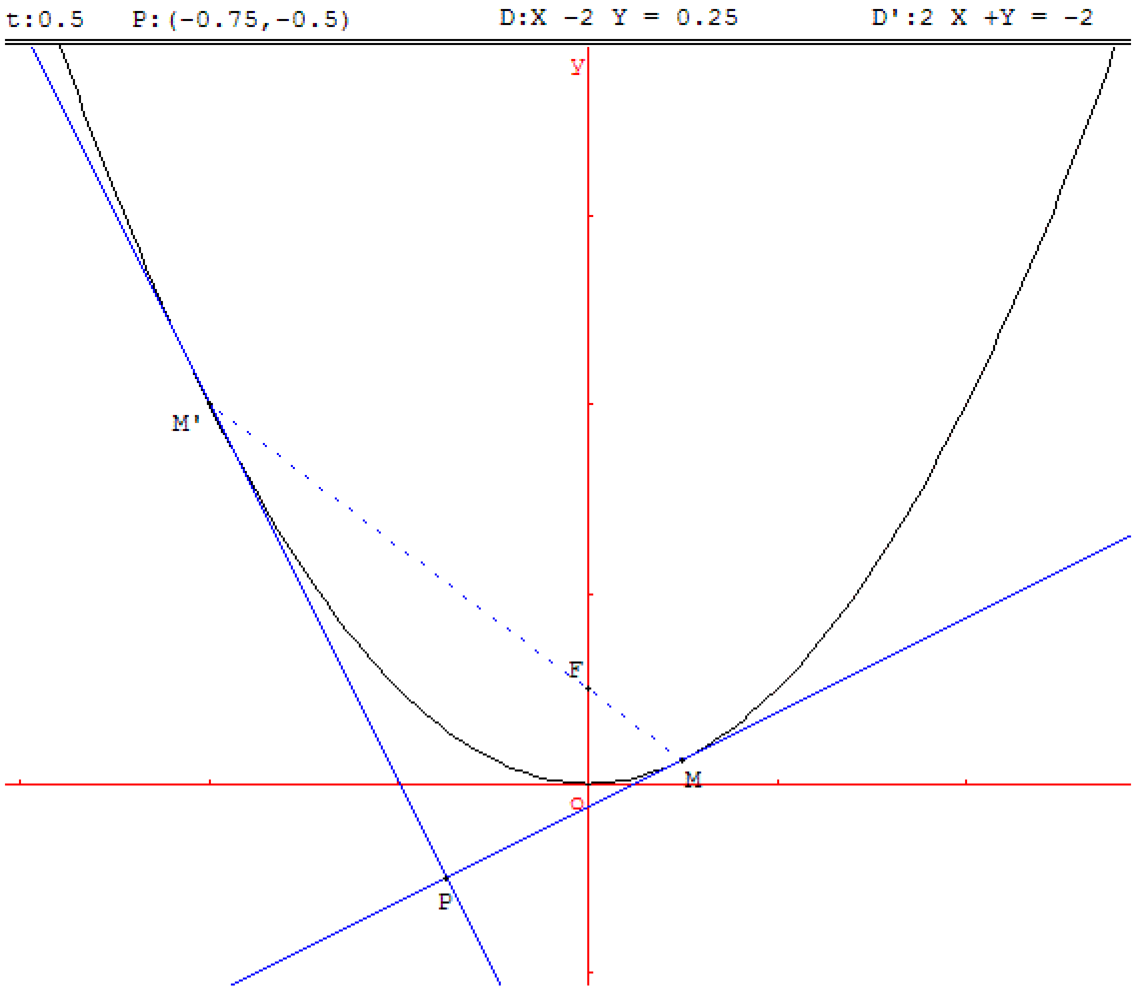
Compétences TICE

– Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer une propriété.

Compétences mathématiques

– Triangles semblables ;
– Propriété de conservation d'une similitude (image d'une droite par une similitude) ;
– Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.

31. Tangentes à une parabole



En géométrie analytique du plan, on considère une parabole (C) et on étudie le point d'intersection des tangentes à (C) en deux points dont les abscisses sont liées par une relation simple.

Situation

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère la parabole (C) d'équation $y = \frac{x^2}{2}$.

Étant donné un réel t non nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole (C) aux points M et M*'* d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$.

1. (a) À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la parabole (C).

- On se donne un réel t. Placer le point M d'abscisse t sur la courbe (C).
- Tracer la droite (D) tangente à (C) au point M.

Indication : Si le logiciel utilisé le nécessite, calculer d'abord le coefficient directeur de cette tangente.

(b) Placer le point M’ d’abscisse $t' = -\frac{1}{t}$ sur la courbe (*C*). Tracer la droite (*D’*) tangente à (*C*) en M’.
Placer le point d’intersection P des droites (*D*) et (*D’*).

- Lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$, à quel ensemble le point P semble-t-il appartenir ?

2. Démonstration

- Donner les équations des droites (*D*) et (*D’*).
- Calculer les coordonnées du point P et conclure sur la propriété conjecturée.

Remarques

La droite MM’ passe par un point fixe, le foyer F de la parabole.

Définition : La *courbe orthoptique* d'une parabole est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole perpendiculaires entre elles, autrement dit le lieu des points d'où l'on «*voit*» la parabole sous un angle droit.

Le produit des coefficients directeurs $t \times (-\frac{1}{t}) = -1$. Les deux tangentes sont perpendiculaires. Le lieu géométrique est donc la courbe orthoptique, directrice de la parabole.

47. Partage d'un triangle

Dans le plan on définit un triangle ABC non isocèle en A et dont les angles en B et en C sont aigus. On note a son aire.
On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et l’on se place dans le cas où CH > BH.

On se propose de démontrer qu’il existe une droite et une seule perpendiculaire au côté [BC], en un point M, qui partage le triangle ABC en deux polygones de même aire.

- Construire la figure demandée en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Déterminer, à l’aide du logiciel, la position de M en lequel la droite recherchée doit couper le segment [CH] pour répondre au problème posé.
- Étudier le cas où le point M est sur le segment [BH].
- On suppose que le point M est situé sur le segment [CH] et on pose CM = x. On appelle N le point d’intersection du segment [AC] avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par M.

On note L la longueur du segment [CH] . On admet que la fonction f qui, à tout x de [0; L], associe l’aire du triangle CMN est continue.
On ne cherchera pas à expliciter $f(x)$.

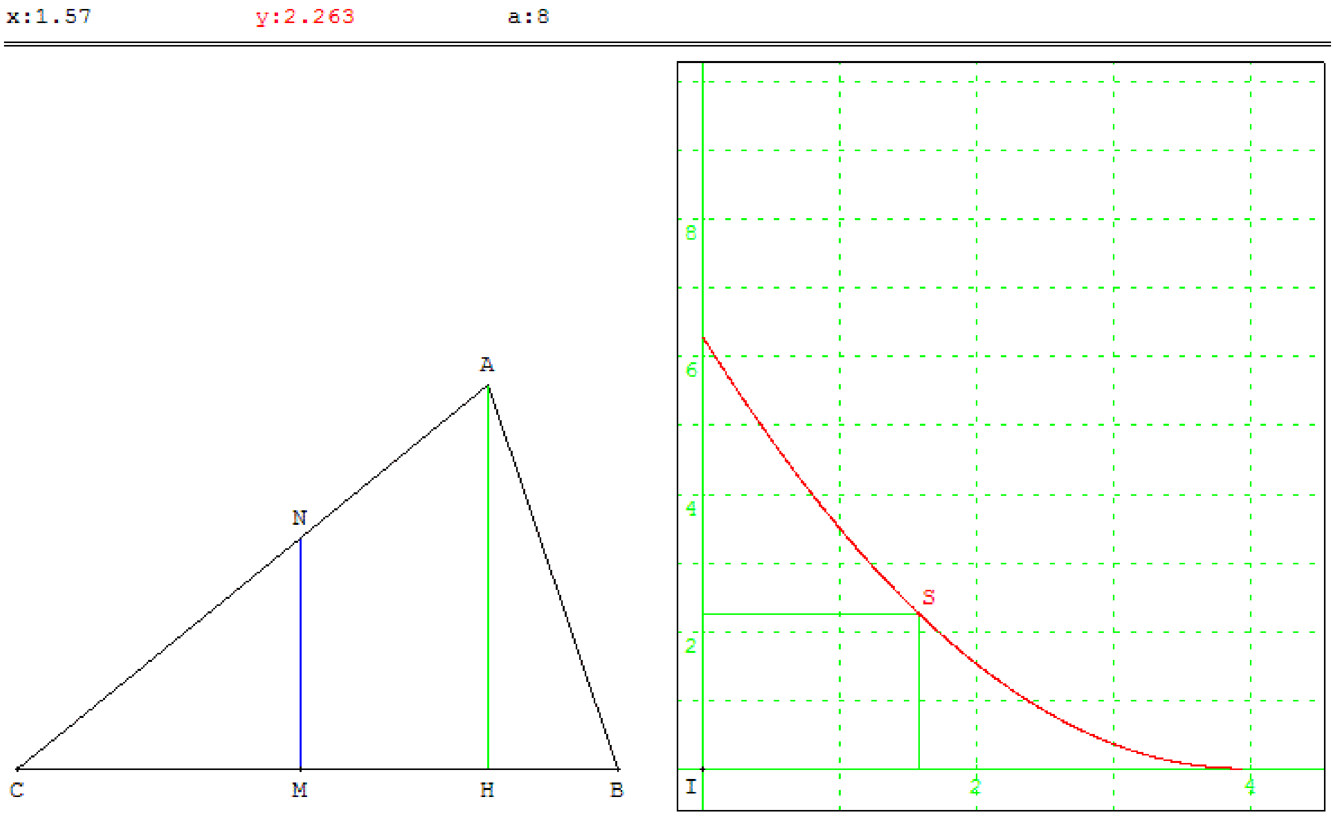
(a) Que traduit l’égalité $f(x) = \frac{a}{2}$?

- Préciser les variations de f à l’aide du logiciel. Déterminer la valeur de $f(0)$.
- Comparer $f(x)$ et $\frac{a}{2}$ quand M est en H.
- En déduire la réponse au problème posé.

Production demandée

- Figure réalisée avec emplacement du point M répondant au problème.
- Interprétation de l'égalité (a).

- Utilisation d'un théorème d'analyse.



Indications

$f(0) = 0$, $f(\text{L}) > \frac{a}{2}$ lorsque M est en H, comme f est continue sur [0; L], d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur x pour laquelle $f(x) = \frac{a}{2}$.

Le triangle CMN a alors une aire égale à la moitié de celle de ABC.

Pour l'aire du triangle CMN solution on a : $\frac{1}{2}x \times \text{MN} = \frac{a}{2}$, d'où $\text{MN} = \frac{a}{x}$.

Les triangles rectangles NMC et AHC sont semblables, donc $\tan(\text{C}) = \frac{MN}{MC} = \frac{HA}{HC}$, soit $\frac{a}{x^2} = \frac{HA}{HC}$, d'où $x = \sqrt{a\frac{HC}{HA}}$.

x = CM, $y = f(x) = \textit{Aire}(\text{CMN})$, dans le cadre de droite est représenté le point S(x, y).