Résolution graphique d'équations du second degré

Travaux pratiques de mathématiques en 1S avec GéoPlan.

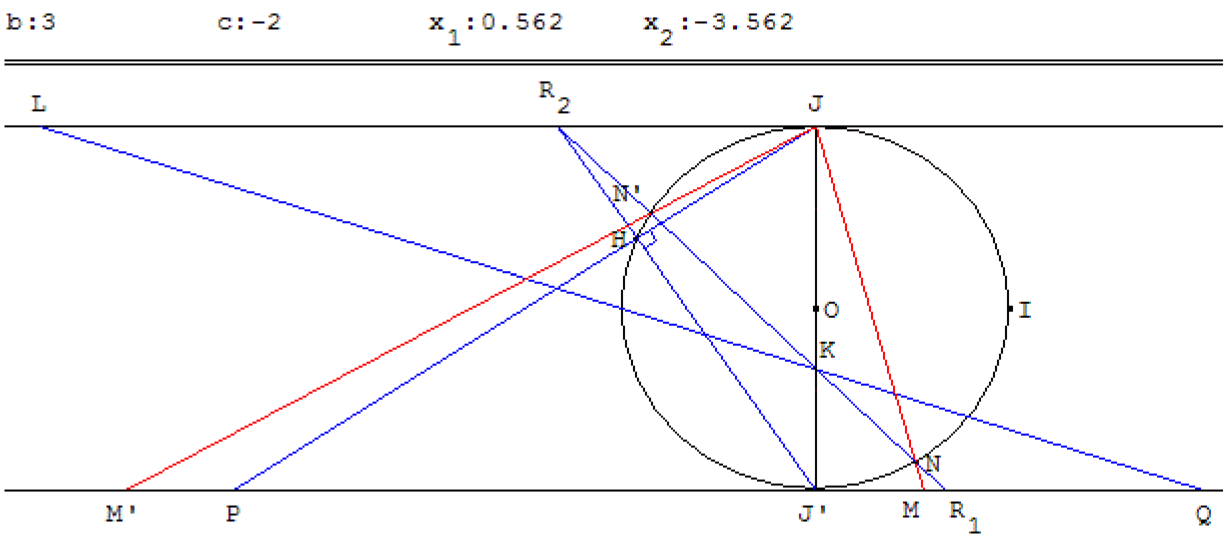
Sommaire

Faire des maths … avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr
Ce document PDF : http://www.debart.fr/pdf/equa_2nd.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/1s/equa_2nd.html

Document n° 36, réalisée le 22/3/2003, modifiée le 17/3/2007

On se propose de résoudre par une construction géométrique toute équation du second degré.
Les seules notions nécessaires sont : équations de droite, droites orthogonales, cercles et équation du second degré.

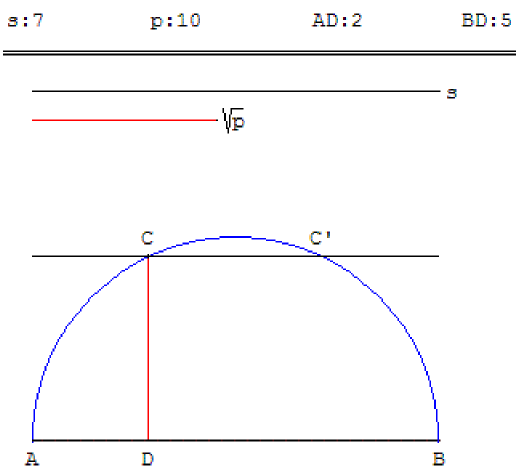
1. Méthode de K. Von Staudt



Soit résoudre graphiquement l'équation $x^2 + bx + c = 0$.
Dans le repère (O, I, J) les droites (d_1) et (d_2) sont tangentes au cercle unité en J' et J.
Sur la droite (d_1) placer les points P et Q d'abscisses $-b$ et $-c$, puis sur (d_2) le point L d'abscisse -4.
La droite (PJ) recoupe le cercle en H. La droite (JH') coupe (d_2) en R_2.
La droite (QL) coupe (JJ') en K. La droite (KR_2) coupe le cercle en N et N'.
Les droites (JN) et (JN') coupent la droite (d_1) en M et M'.
Les abscisses x_1 et x_2 de M et M' sont les solutions de l'équation du second degré.

Carrega J.-C. - Théorie des corps : la règle et le compas - Hermann 2001

2. Construire deux segments connaissant la somme et le produit de leurs longueurs

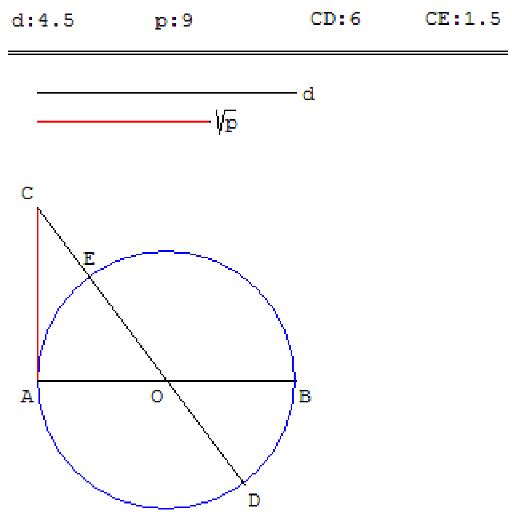


À partir d'un segment [AB] de longueur *s*, tracer le demi-cercle de diamètre [AB]. Si la droite située à une distance $\sqrt{p}$ coupe le demi-cercle en C, le triangle ABC est rectangle et la hauteur CD est moyenne proportionnelle entre AD et DB, solution du problème.

AD et DB sont les solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

Leurs opposés sont les solutions de l'équation $x^2 + sx + p = 0$.

3. Construire deux segments connaissant la différence et le produit de leurs longueurs



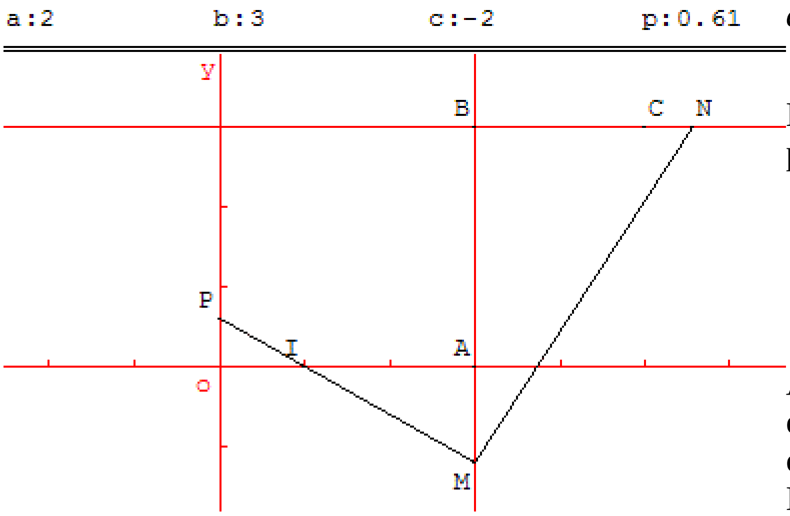
À partir d'un segment [AB] de longueur *d*, tracer le cercle de diamètre [AB] et de centre O. Sur la tangente en A, placer le point C situé à une distance rac(*p*) de A.
La droite (CO) coupe le cercle en D et E.
CD et CE sont solution du problème qui est toujours possible.
En effet p = CD × CE = CA² est la puissance du point C par rapport au cercle et CD - CE = DE = *d*.

CD et -CE sont les solutions de l'équation $x^2 - dx - p = 0$.
- CD et CE sont les solutions de l'équation $x^2 + dx - p = 0$.

4. Orthogone de Lill

IREM de Strasbourg
Pour une mathématique vivante en « seconde »
Publication APMEP n° 27 - 1979

Soit résoudre graphiquement l'équation : $ax^2 + b\,x + c = 0$.



Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, on place les points I, A, B, C définis par :

$\overrightarrow{OI} = \vec{i}$; $\overrightarrow{IA} = a\,\vec{i}$; $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{j}$;

$\overrightarrow{BC} = -\,c\,\vec{i}$.

A tout point P de coordonnées P(0; p), on associe le point N de la droite (BC) construit de la façon suivante :
La droite (PI) coupe (AB) en un point M.
La perpendiculaire en M à (PM) coupe (BC) en N.

a. Calculer les coordonnées de M et la longueur BN.

Les triangles OPI et AMI ont leurs petits côtés parallèles aux axes. Ils sont donc rectangles respectivement en O et A. Leurs angles aigus en I sont opposés par le sommet. Le calcul de tan(Î) dans ces deux triangles permet d'écrire :

$\tan(\hat{I}) = \frac{OA}{IA} = \frac{OP}{OI}$ soit $\frac{AM}{a} = \frac{p}{1}$, donc AM = $a\,p$

Le point M a donc pour coordonnées M($1 + a$, ap).
Le triangle BMN, rectangle en B, a ses côtés perpendiculaires aux côtés du triangle AMI.
Les angles aigus I et M sont égaux et on a tan(M) = tan(Î) = p.

D'où $\tan(M) = \frac{BN}{BM} = \frac{BN}{MA+AB} = \frac{BN}{ap+b} = p$.

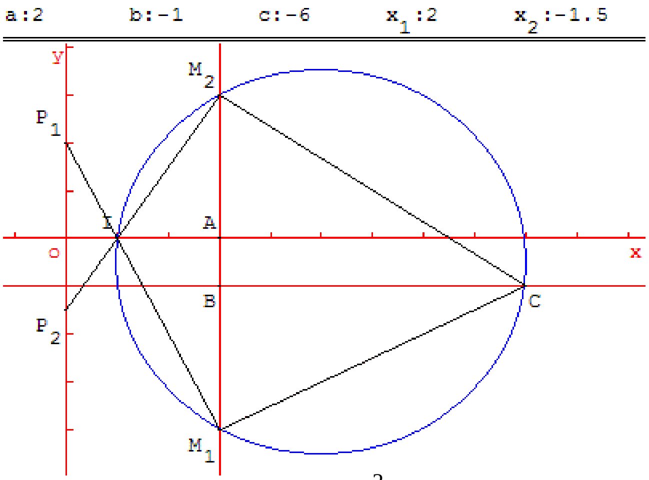
Donc BN = $(ap + b)\,p = ap^2 + bp$.

En vérifiant le sens des vecteurs on voit que $\overrightarrow{BN} = (ap^2 + bp)\,\vec{i}$.

b. Démontrer que N et C confondus équivaut à $ap^2 + bp + c = 0$.

Les N et C sont confondus si $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{BN} = -\,c\,\vec{i}$,
donc $ap^2 + bp = -c$ soit $ap^2 + bp + c = 0$.

c. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

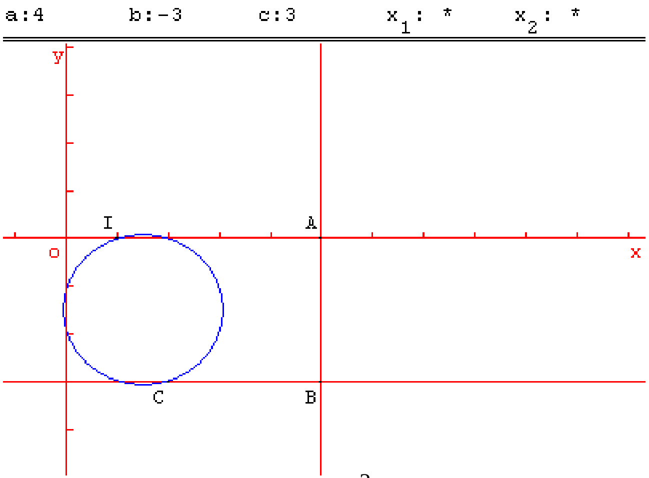


Application 1 : $2x^2 - x - 6 = 0$

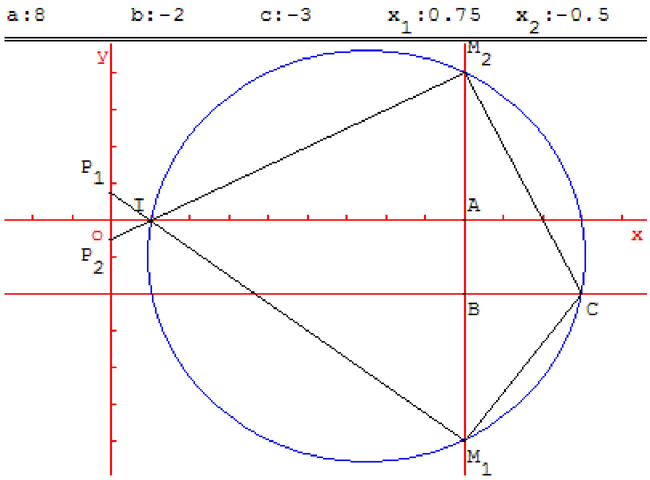
Les solutions de l'équation sont donc les ordonnées des points P pour lesquels la construction ci-dessus donne N = C.

En supposant que P (et donc M) existe, justifier que M appartient au cercle de diamètre [IC].

En effet, si P existe, comme N = C, le triangle IMN est confondu avec le triangle rectangle IMC. Ce triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [IC].

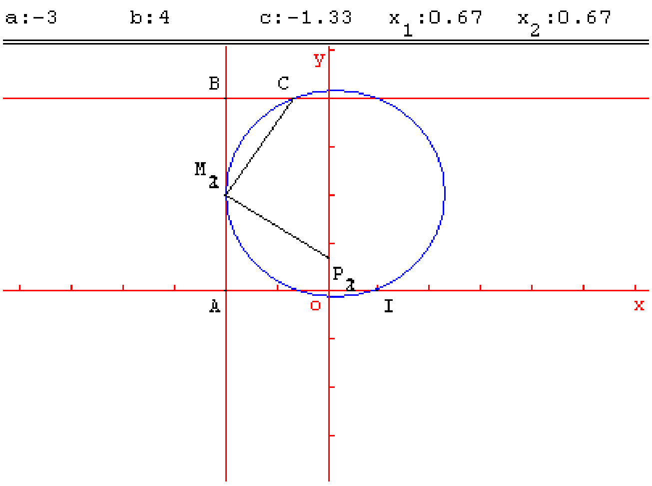


Application 2 : $4x^2 - 3x + 3 = 0$



Application 3 : $8x^2 - 2x - 3 = 0$

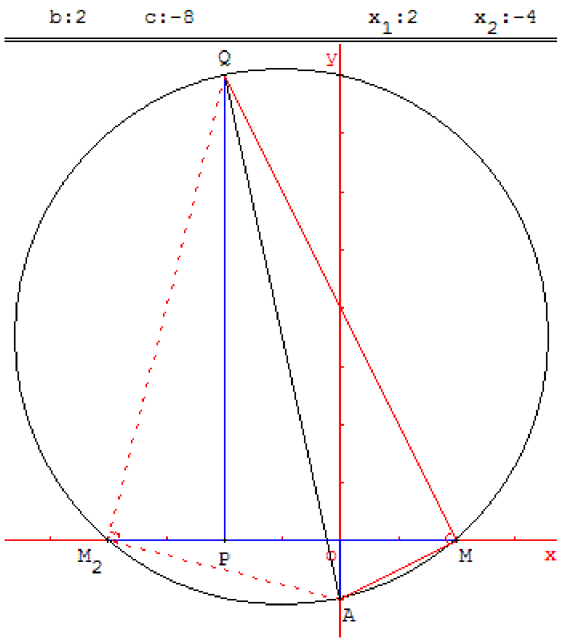
Orthogone IM_1CM_2 : lorsque le cercle de diamètre [IC] coupe la droite (AB) en deux points M_1 et M_2 (*applications 1 ou 3*), la droite (IM_1) coupe l'axe (Ox) en P_1 et la droite (IM_2) coupe l'axe (Ox) en P_2. Les « ordonnées » x_1 du point P_1 et x_2 du point P_2 sont les deux solutions de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.
Lorsque le cercle de diamètre [IC] et la droite (AB) ont une intersection vide (*application 2*), l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
Lorsque le cercle de diamètre [IC] est tangent à la droite (AB) en un point M (*application 4*) ; les points M_1 et M_2 sont confondus en M, la droite (IM) coupe l'axe (Ox) en $P = P_1 = P_2$ et l'ordonnée $x_1 = x_2$ du point P est la solution double de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.



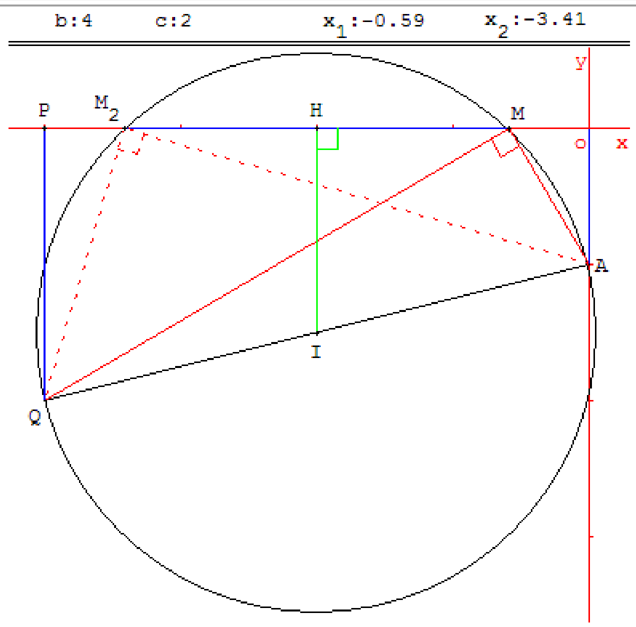
Application 4 : $ax^2 + bx + c = 0$
avec $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

5. Cercle défini par un diamètre

Pour résoudre graphiquement l'équation $x^2 + bx + c = 0$, placer les points de coordonnées A(0, -1) ; P($-b$, 0) et Q($-b$, $-c$).
Les abscisses des points d'intersection du cercle de diamètre [AQ] avec l'axe (Ox), lorsqu'ils existent, sont les solutions de l'équation.



$c < 0$



$c > 0$

En effet, si M est un des points d'intersection du cercle et de l'axe des ordonnées.
Calculons AQ² de deux manières :

$AQ^2 = AM^2 + MQ^2$
$= (AO^2 + OM^2) + (MP^2 + PQ^2)$
$= AO^2 + OM^2 + (\overline{PO} + \overline{OM})^2 + PQ^2$
$= 1 + OM^2 + (b + \overline{OM})^2 + c^2$
$= 1 + 2OM^2 + 2b\overline{OM} + b^2 + c^2$

$AQ^2 = (\overline{AO} + \overline{PQ}) + OP^2$
$= (1 - c)^2 + b^2 = 1 - 2c + c^2 + b^2$

En égalant ces deux expressions, il vient :
$1 + 2OM^2 + 2b\overline{OM} + b^2 + c^2$
$= 1 - 2c + c^2 + b^2$
soit
$2OM^2 + 2b\overline{OM} = -2c$ et $\overline{OM}^2 + b\overline{OM} + c = 0$
$\overline{OM}$ est une solution de l'équation étudiée.
On montre, de même, que l'ordonnée de M_2, deuxième point d'intersection du cercle et de l'axe (Oy), est l'autre solution de l'équation.

Discussion

Lorsque c est négatif, *figure de gauche*, A et Q sont de part et d'autre de l'axe (Oy), il y a deux intersections, donc deux solutions.

Lorsque c est positif, *figure ci-dessus*, A et Q sont dans le même demi-plan par rapport à (Oy), il n'y a intersection de l'axe et du cercle que si la distance de son centre I à (Oy) est inférieure à son rayon.

Distance de I à l'axe : $IH = \frac{1}{2}(OA + PQ) = \frac{1}{2}|1 + c|$

Rayon : $IQ = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2}\sqrt{(1-c)^2 + b^2}$

Il faut donc : $\frac{1}{2}|1 + c| \leq \frac{1}{2}\sqrt{(1-c)^2 + b^2}$
ou $(1 + c)^2 \leq (1 - c)^2 + b^2$

On retrouve bien $4c \leq b^2$, soit $\Delta = b^2 - 4c$ positif.