

# Géométrie en cinquième avec GéoPlan

## Construction de triangles

### Sommaire

1. Deux droites
2. Construire un triangle, connaissant les trois côtés
3. Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés
4. Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles adjacents
5. Triangles isocèles ayant un angle de 80 degrés
6. Cerfs-volants inscrits dans deux cercles sécants

### II Calcul d'aires

- 2.1. Goutte d'eau
- 2.2. Entre deux cercles - Une fleur de quatre pétales
- 2.3. Un triangle dans un carré
- 2.4. Un triangle dans un rectangle ou un carré

Faire des maths ... avec GéoPlan : <http://debart.pagesperso-orange.fr>

Document Word : [http://www.debart.fr/doc/geometrie\\_cinquieme.doc](http://www.debart.fr/doc/geometrie_cinquieme.doc)

Document PDF : [http://www.debart.fr/pdf/geometrie\\_cinquieme.pdf](http://www.debart.fr/pdf/geometrie_cinquieme.pdf)

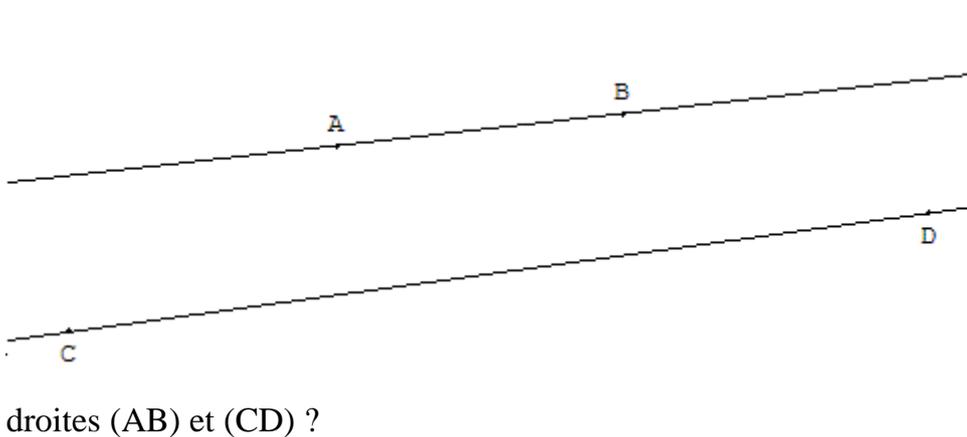
Page HTML : [http://debart.pagesperso-orange.fr/college/geometrie\\_cinquieme.html](http://debart.pagesperso-orange.fr/college/geometrie_cinquieme.html)

Page n° 95, réalisée le 9/10/2006, mise à jour le 6/1/2008

Les problèmes proposés dans les pages « ...avec GéoPlan » sont assez guidés. À partir d'exercices, souvent proposés en classe, nous avons abrégé la démarche expérimentale et en raison de la nature du média Internet, nous livrons « *tel que* » des indications. Ceci est en général suffisant pour les élèves qui auront à s'approprier les solutions et à rédiger les démonstrations.

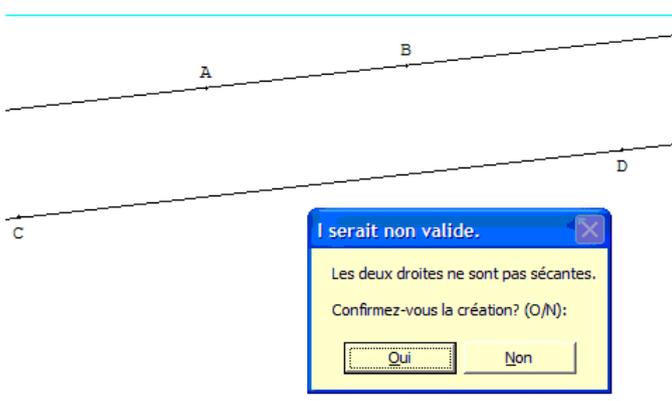
Les professeurs voulant utiliser ces activités en classe devront reconstituer la démarche pédagogique. Par exemple, la question "*démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles*" pourra être remplacée par "*que peut-on dire des droites (AB) et (CD)*" ou encore de façon plus elliptique par "*que peut-on dire*", quitte à affronter le rigolo du fond de la classe qui répondra "*rien*".

## 1. Deux droites



Que dire des deux droites ci-contre ?  
Avec GéoPlan, changer le cadrage en tapant sur la touche agrandir (>).

Modifier la droite (CD) en tapant sur la touche P.  
Que dit alors GéoPlan à propos de l'intersection des



Que dire des deux droites ci-contre ?



### Indications

Les deux droites ci-dessus semblent parallèles, mais GéoPlan accepte de tracer leur point d'intersection.

Vérifions avec un agrandissement où en déplaçant la vue (clic droit maintenu sous GéoPlan).

Par la touche P, l'affectation directe du point D permet de tracer une droite (CD) parallèle à (AB).

## 2. Construire un triangle connaissant les longueurs des trois côtés

Étant donné un segment  $[BC]$  de longueur  $a$  et deux nombres positifs  $b$  et  $c$ , construire un triangle  $ABC$  tel que  $AC = b$  et  $AB = c$

Tracer les cercles  $(c_1)$  de centre B, de rayon  $c$  et  $(c_2)$  de centre C de rayon  $b$ .

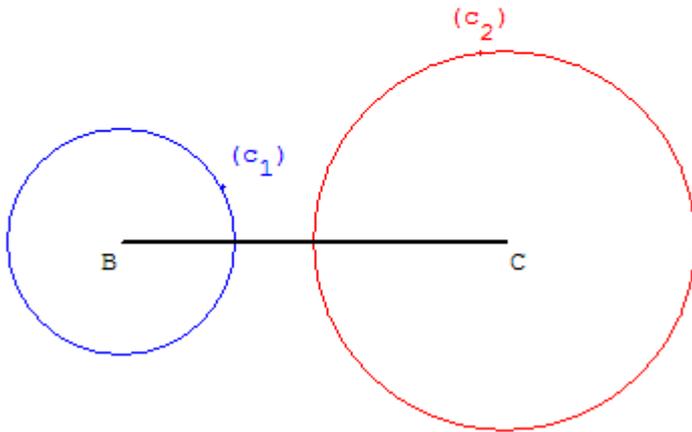
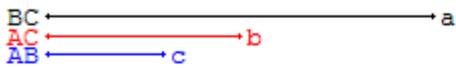
BC = a = 5      AC = b = 2      AB = c = 4	BC = a = 5      AC = b = 2      AB = c = 4
<p>Si les cercles <math>(c_1)</math> et <math>(c_2)</math> sont sécants en deux points distincts <math>A</math> et <math>A'</math>, le triangle <math>ABC</math> est une construction possible, le triangle <math>A'BC</math> est aussi une solution. Ces deux triangles sont symétriques par rapport à la droite <math>(BC)</math>.</p> <p>Dans ce cas <math>a + b \geq c</math>, l'inégalité triangulaire <math>BA + AC \geq BC</math> est vérifiée.)</p>	<p>Lorsqu'il y a une solution, si les longueurs sont distinctes, on peut construire quatre triangles, deux à deux symétriques par rapport au côté <math>[BC]</math>, à sa médiatrice et à son milieu.</p>

### Commandes GéoPlan

Faire varier les longueurs  $BC$ ,  $AB$  ou  $CA$ , en déplaçant les extrémités  $a$ ,  $b$  ou  $c$ .

BC trop grand

$$BC = a = 5 \quad AC = b = 2.5 \quad AB = c = 1.5$$

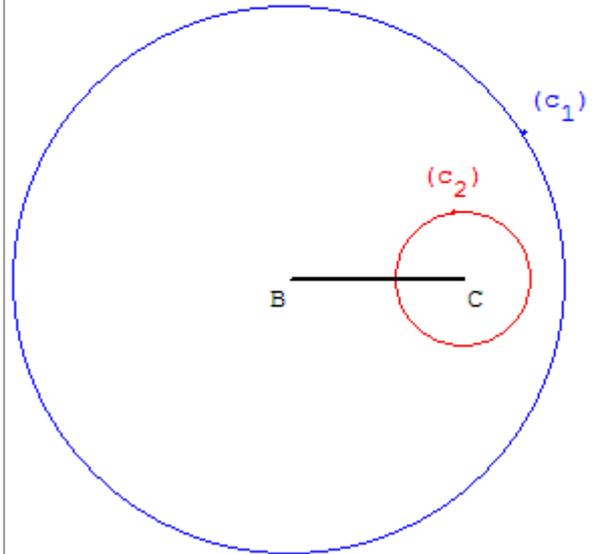


Si  $b + c < a$  les cercles  $(c_1)$  et  $(c_2)$  sont extérieurs l'un à l'autre, la construction est impossible.

Si  $b + c = a$  les deux cercles sont tangents en A (confondu avec A'), l'égalité  $BA + AC = BC$  caractérise l'appartenance du point A au segment [BC].

BC trop petit

$$BC = a = 5 \quad AC = b = 2 \quad AB = c = 8$$

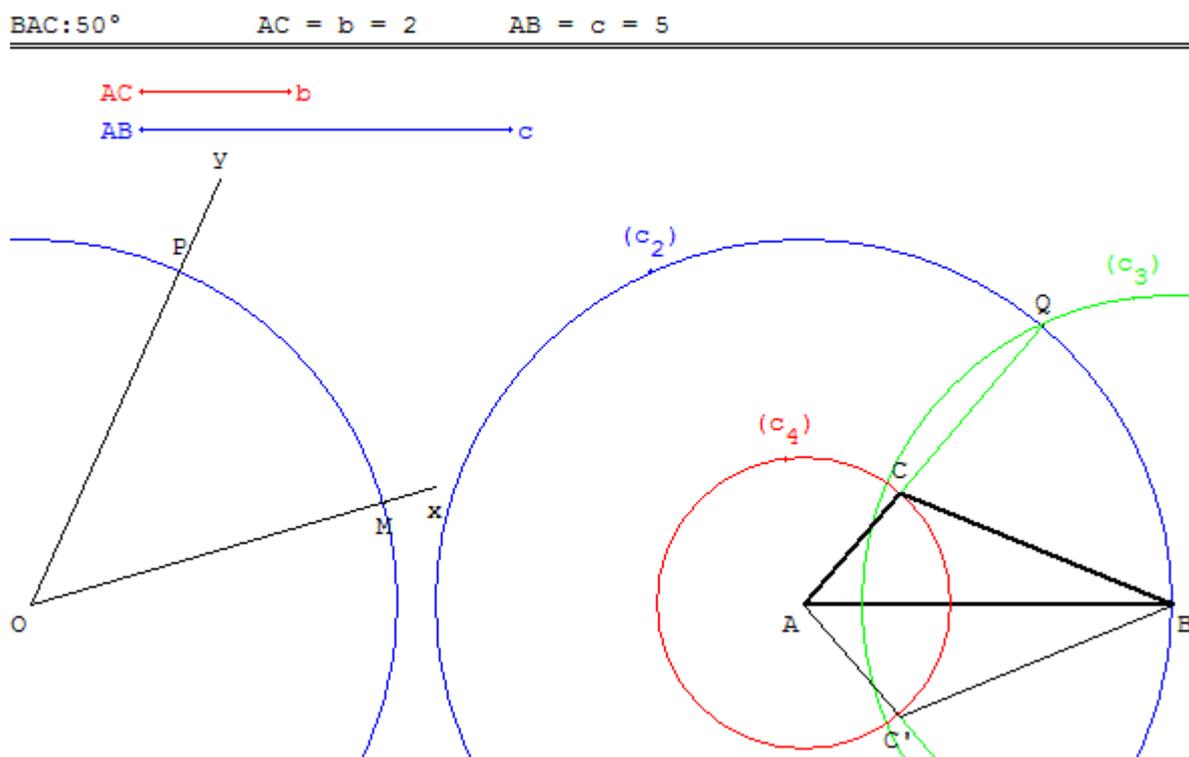


Si  $a + b < c$  ou  $a + c < b$  un des cercles  $(c_1)$  ou  $(c_2)$  est à l'intérieur de l'autre, la construction est impossible.

Si  $a + b = c$  ou  $a + c = b$  les deux cercles sont tangents intérieurement en A (confondu avec A'), le point A est sur la droite (BC).

### 3. Construire un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés

Étant donné un segment  $[AB]$  de longueur  $c$ , un nombre positif  $b$  et un angle  $x\hat{O}y$ , construire un triangle  $ABC$  tel que  $AC = b$  et que  $B\hat{A}C = x\hat{O}y$ .



Pour reporter l'angle  $x\hat{O}y$  sur la demi-droite  $[AB)$  on trace les cercles  $(c_1)$  et  $(c_2)$  de centres  $O$  et  $A$  et de rayon  $c$ .  $[Ox)$  rencontre  $(c_1)$  en  $M$  et  $[Oy)$  en  $P$ . Avec le compas on reporte l'arc  $MP$  en traçant le cercle  $(c_3)$  de centre  $B$  et de rayon  $MP$ . Ce cercle coupe  $(c_2)$  en  $Q$  et  $Q'$ . Les angles  $B\hat{A}Q$  et  $B\hat{A}Q'$  sont égaux à  $x\hat{O}y$ .

$[AQ)$  rencontre le cercle  $(c_4)$  de centre  $A$  et de rayon  $b$  en  $C$  et  $[AQ')$  en  $C'$ .

Le triangle  $ABC$  est une construction toujours possible ( $b > 0$ ,  $c > 0$  et  $0 < x\hat{O}y < 180^\circ$ ), le triangle  $ABC'$  est aussi une solution. Ces deux triangles sont symétriques par rapport à la droite  $(AB)$ .

Si  $ABC$  n'est pas un triangle isocèle en  $C$ , en reportant l'angle  $x\hat{O}y$  en  $B$  sur la demi-droite  $[BA)$  on obtient deux autres triangles symétriques de  $ABC$  par rapport au milieu de  $[AB]$  et à sa médiatrice.

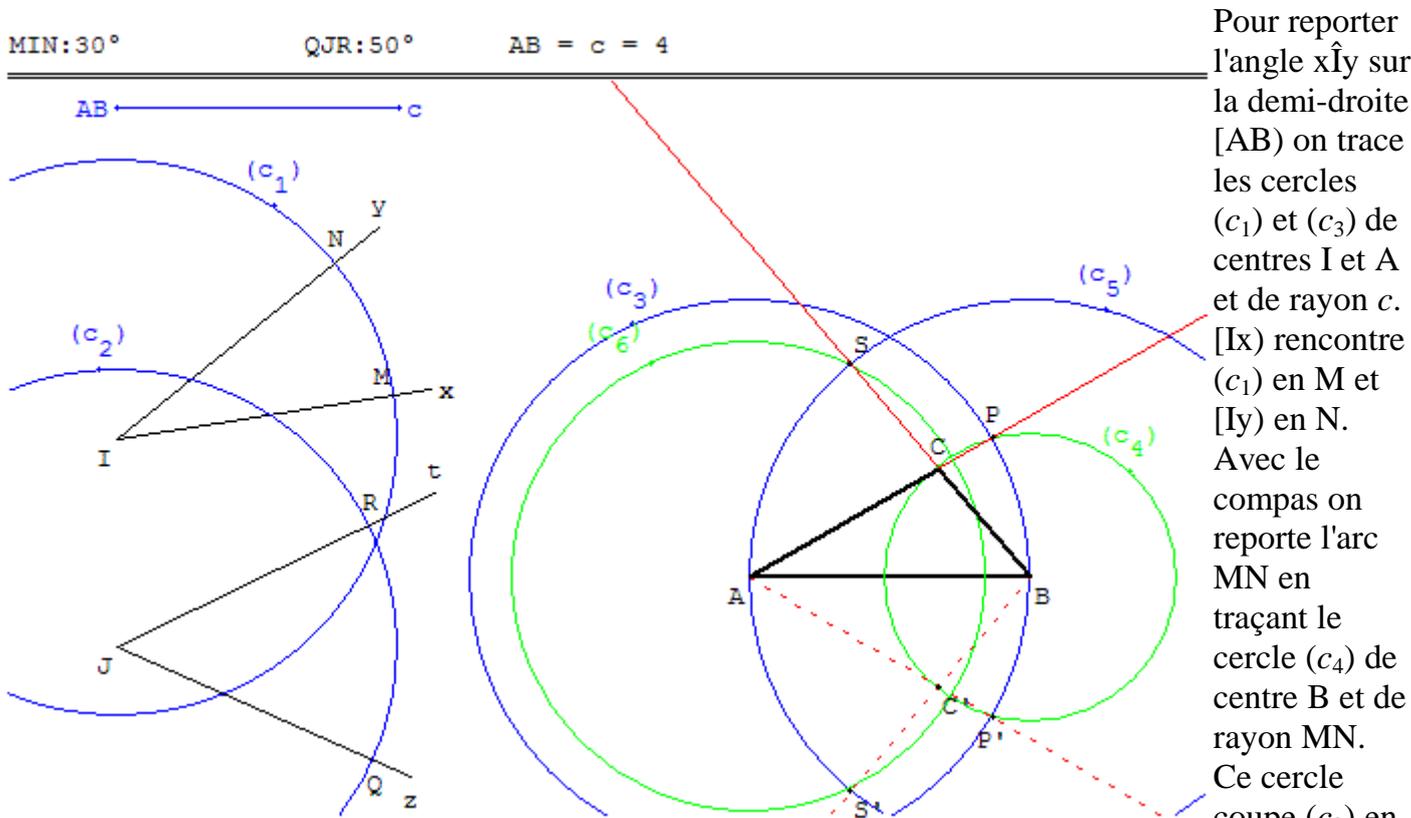
#### Commandes GéoPlan

Faire varier les longueurs des côtés en cliquant sur  $b$  ou  $c$  ou l'angle en déplaçant les points  $x$  ou  $y$ .

La figure est plus lisible lorsque  $b < c$ , renommer éventuellement les points.

#### 4. Construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents

Étant donné un segment  $[AB]$  de longueur  $c$ , deux angles  $x\hat{I}y$  et  $z\hat{J}t$ , construire un triangle  $ABC$  tel que  $B\hat{A}C = x\hat{I}y$  et  $ABC = z\hat{J}t$ .



Pour reporter l'angle  $x\hat{I}y$  sur la demi-droite  $[AB]$  on trace les cercles  $(c_1)$  et  $(c_3)$  de centres  $I$  et  $A$  et de rayon  $c$ .  $[Ix]$  rencontre  $(c_1)$  en  $M$  et  $[Iy]$  en  $N$ . Avec le compas on reporte l'arc  $MN$  en traçant le cercle  $(c_4)$  de centre  $B$  et de rayon  $MN$ . Ce cercle coupe  $(c_2)$  en

$P$  et  $P'$ . Les angles  $B\hat{A}P$  et  $B\hat{A}P'$  sont égaux à  $x\hat{I}y$ .

De même pour reporter l'angle  $z\hat{J}t$  sur la demi-droite  $[BA]$  on trace les cercles  $(c_2)$  et  $(c_5)$  et centres  $J$  et  $B$  et de rayon  $c$ . On reporte l'arc  $QR$  en traçant le cercle  $(c_6)$  de centre  $A$  et rayon  $QR$ . Ce cercle coupe  $(c_5)$  en  $S$  et  $S'$ . Les angles  $ABS$  et  $ABS'$  sont égaux à  $z\hat{J}t$ .

Si les demi-droites  $[AP)$  et  $[BS)$  sont sécantes en un point  $C$ , le triangle  $ABC$  est une construction possible. Les demi-droites  $[AP')$  et  $[BS')$  sont alors sécantes en  $C'$ , le triangle  $ABC'$  est aussi une solution. Ces deux triangles sont symétriques par rapport à la droite  $(AB)$ .

Si  $ABC$  n'est pas un triangle isocèle en  $C$ , en permutant les angles on obtient deux autres triangles symétriques de  $ABC$  par rapport au milieu de  $[AB]$  et à sa médiatrice.

La somme des angles d'un triangle étant un angle plat :

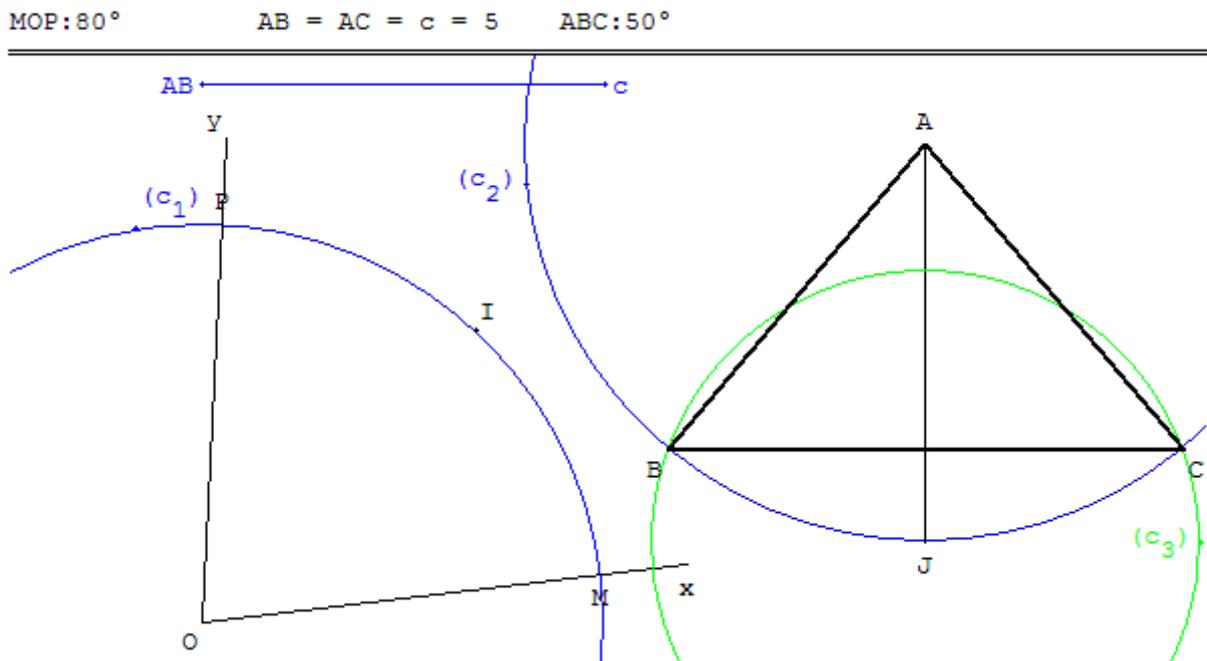
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ , la construction est possible lorsque  $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$ , soit  $x\hat{I}y + z\hat{J}t < 180^\circ$ .

#### Commandes GéoPlan

Faire varier la longueur de  $[AB]$  en cliquant sur  $c$  ou les angles en déplaçant les points  $x, y, z$  ou  $t$ .

## 5. Triangles isocèles ayant un angle de 80 degrés

### Angle au sommet de 80°



Étant donné une longueur  $c$  et un angle  $x\hat{O}y$ , construire un triangle isocèle  $ABC$  tel que  $AB = AC = b$  et que  $B\hat{A}C = x\hat{O}y$ .

En adaptant la construction du paragraphe 3, reporter la moitié de l'angle  $x\hat{O}y$  sur une demi-droite  $[AJ]$  passant par  $A$ . On trace les cercles  $(c_1)$  et  $(c_2)$  de centres  $O$  et  $A$  et de rayon  $c$ .  $[Ox)$  rencontre  $(c_1)$  en  $M$  et  $[Oy)$  en  $P$ . La bissectrice de  $M\hat{O}P$  coupe le cercle  $(c_1)$  en  $I$  qui partage l'arc  $MP$  en deux parties égales. Avec le compas on reporte l'arc  $IM$  en traçant le cercle  $(c_3)$  de centre  $J$  et de rayon  $IM$ . Ce cercle coupe  $(c_2)$  en  $B$  et  $C'$ . L'angle  $B\hat{A}C$  est égal à  $x\hat{O}y$ . La construction du triangle isocèle  $ABC$  est toujours possible.

Comme la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$ , avec  $\hat{B} = \hat{C}$   
on a  $\hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ$  et en divisant par 2 :  $\hat{B} = 90 - \hat{A}/2$ .

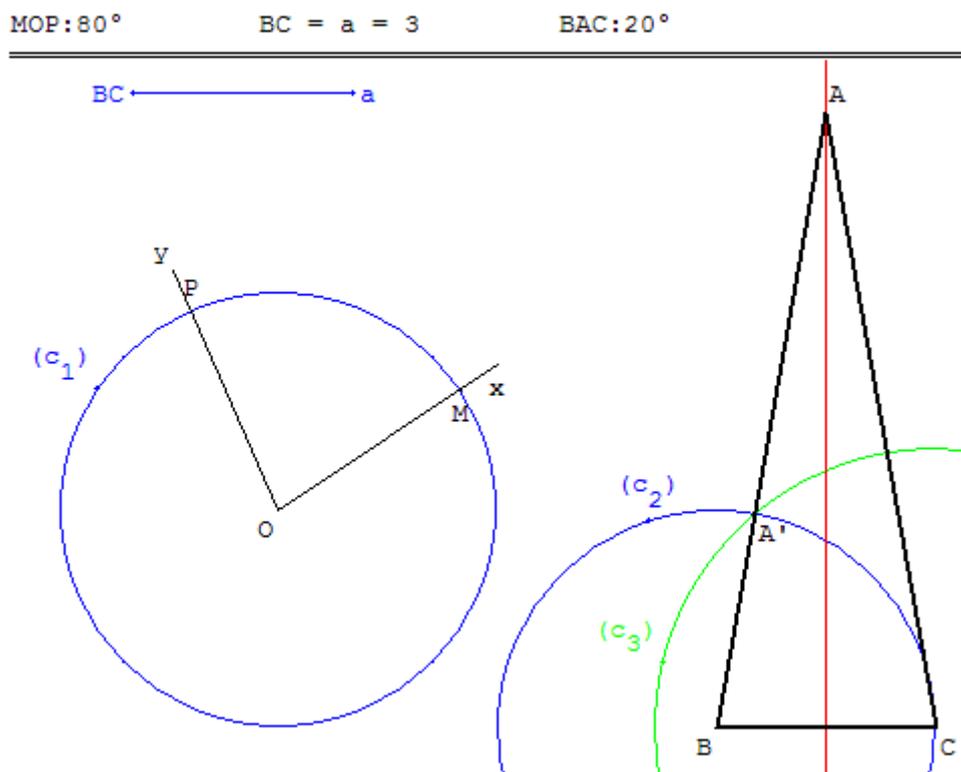
### Commandes GéoPlan

Faire varier les longueurs des côtés égaux en cliquant sur  $c$   
ou l'angle en déplaçant  $x$  ou  $y$ .

Taper sur la touche A pour un angle de  $80^\circ$ .

## Angle à la base de $80^\circ$

Étant donné une longueur  $a$  et un angle  $x\hat{O}y$ , construire un triangle  $ABC$  isocèle en  $A$  tel que la base  $BC = a$  et que  $\widehat{ABC} = x\hat{O}y$ .



Pour reporter l'angle  $x\hat{O}y$  sur la demi-droite  $[BC)$ , on trace les cercles  $(c_1)$  et  $(c_2)$  de centres  $O$  et  $B$  et de rayon  $a$ .  $[Ox)$  rencontre  $(c_1)$  en  $M$  et  $[Oy)$  en  $P$ . Avec le compas on reporte l'arc  $MP$  en traçant le cercle  $(c_3)$  de centre  $C$  et de rayon  $MP$ . Ce cercle coupe  $(c_2)$  en  $A'$  et l'angle  $A'BC$  est égal à  $x\hat{O}y$ .

Si la demi-droite  $[AA')$  coupe la médiatrice de  $[BC)$ , le point d'intersection  $A$  est le sommet du triangle isocèle  $ABC$ .

Cette construction n'est possible que si  $x\hat{O}y < 90^\circ$  (les angles égaux d'un triangle isocèle sont aigus).

Comme la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$ , avec  $\widehat{B} = \widehat{C}$   
on a  $\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^\circ$  et  $\widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{B}$ .

### Commandes GéoPlan

Faire varier la longueur de la base en cliquant sur  $a$   
ou l'angle en déplaçant  $x$  ou  $y$ .

Taper sur la touche A pour un angle de  $80^\circ$ .

## 6. Cerfs-volants inscrits dans deux cercles sécants

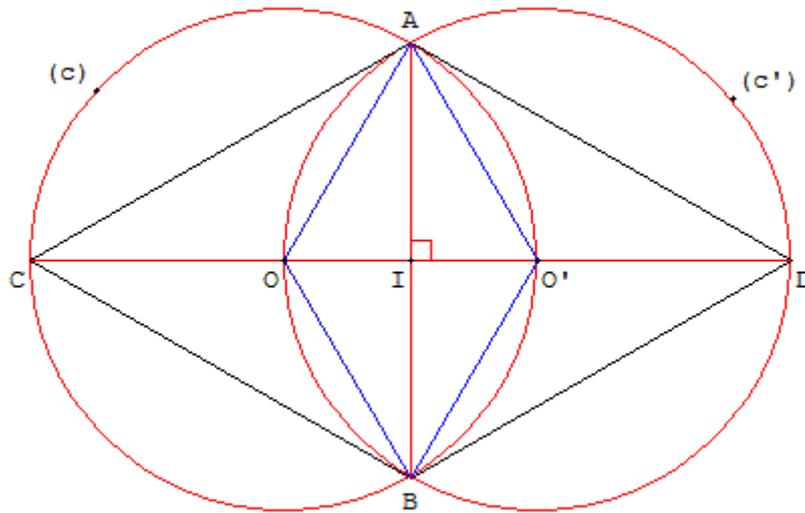
*Figures simples ayant un centre de symétrie ou des axes de symétrie.*

Deux cercles  $(c)$  et  $(c')$  de centres distincts  $O$  et  $O'$  sont sécants en  $A$  et  $B$ .

La ligne des centres  $(OO')$  coupe  $(c)$  en  $C$  et  $(c')$  en  $D$ .

La droite  $(OO')$  est la médiatrice de  $[AB]$  et est axe de symétrie de la figure.

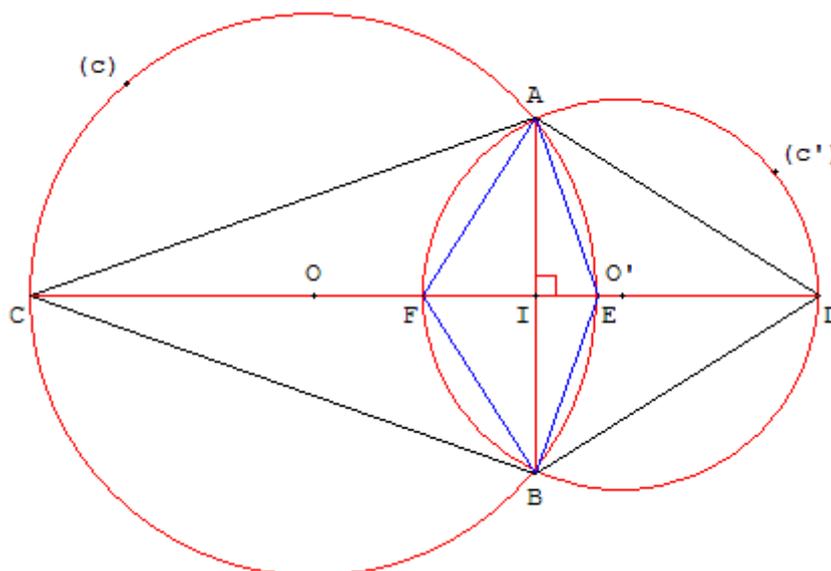
**Cercles de même rayon :** chacun des cercles passe par le centre de l'autre



Les droites  $(OO')$  et  $(AB)$  sont des axes de symétrie et leur point d'intersection  $I$  est centre de symétrie de la figure.

Les quadrilatères  $AOBO'$  et  $ACBD$  sont des losanges d'angles  $60^\circ$  et  $120^\circ$ .

**Cas général**



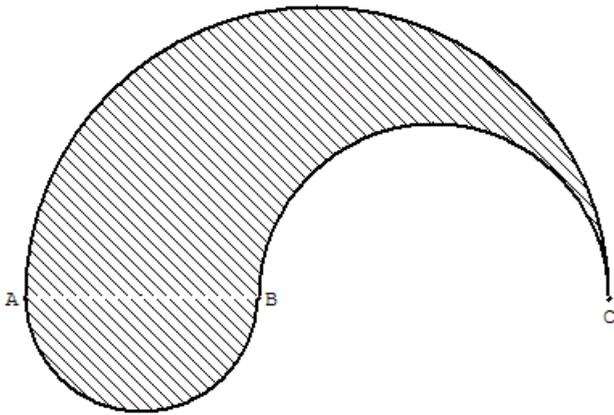
La ligne des centres  $(OO')$  coupe le cercle  $(c)$  en  $C$  et  $E$ , et le cercle  $(c')$  en  $D$  et  $F$ .

Les quadrilatères  $ACBD$  et  $AEBF$  sont des cerfs-volants, ainsi que  $ACBE$  et  $AFBD$ .

Remarquer aussi les pointes de flèche  $ACBF$  et  $ADBE$ .

## II Calcul d'aires

### 2.1. Goutte d'eau



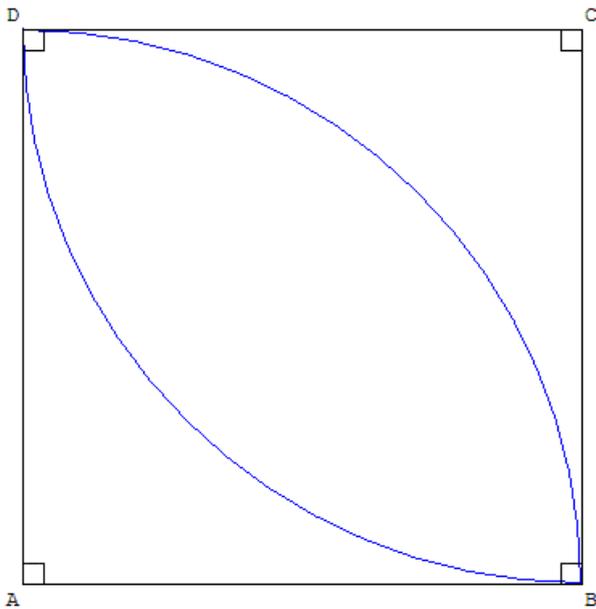
A, B et C sont trois points alignés tels que :  
 $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $BC = 6 \text{ cm}$ .

Cette figure est formée de trois demi-cercles.

Calculer son périmètre.

Calculer son aire.

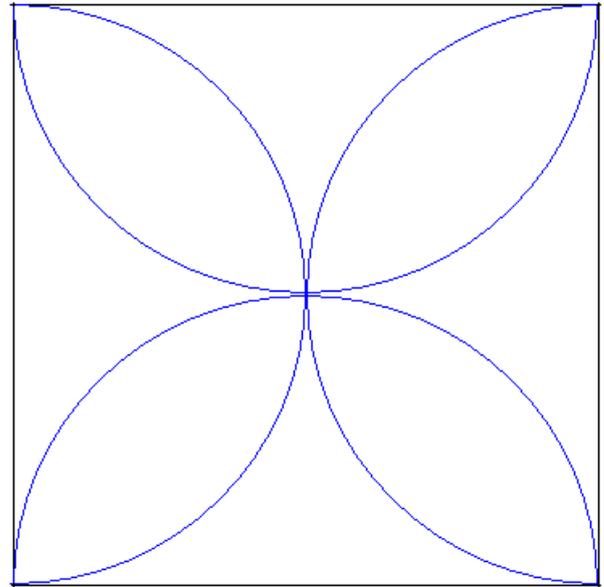
### 2.2. Entre deux cercles



ABCD est un carré de 1 cm de côté.

Calculer l'aire de la figure délimitée par les arcs de cercle de centres A et C passant par B et D.

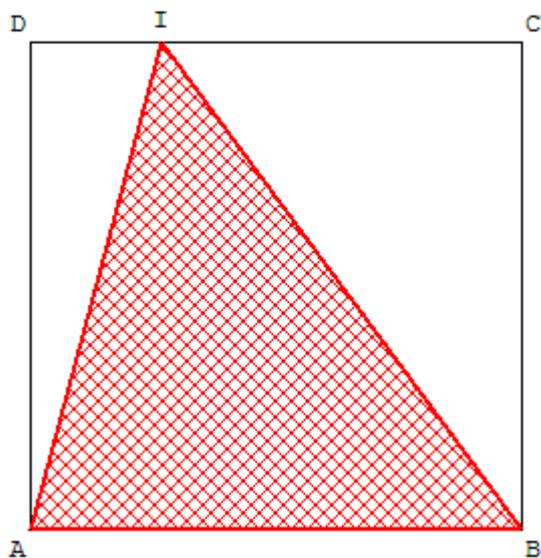
### Une fleur de quatre pétales



Dans un carré de 2 cm de côté, les quatre pétales sont formés par l'intersection de demi-cercles.

Calculer l'aire de la fleur formée par les quatre pétales.

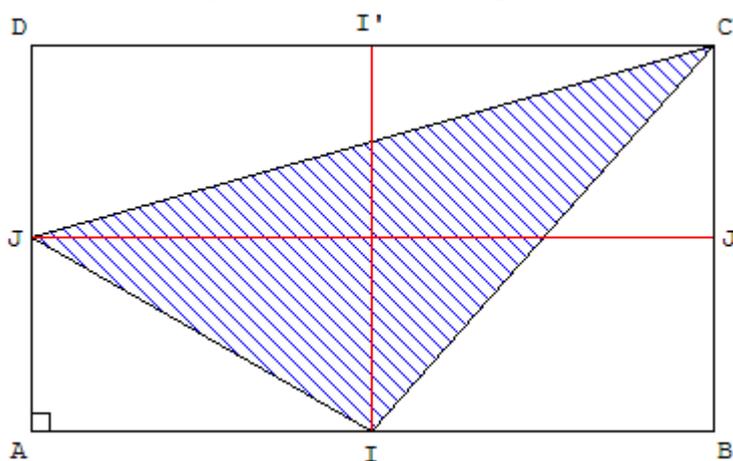
### 2.3. Un triangle dans un carré



I est un point du côté [CD] d'un carré ABCD de côté  $AB = 4$  cm.

L'aire du triangle ABI est la moitié de l'aire du carré soit  $8$   $\text{cm}^2$ .

### 2.4. Un triangle dans un rectangle ou dans un carré



I et J sont les milieux des côtés d'un quadrilatère ABCD.

Rectangle de cotés  $AB = 6$  cm et  $BC = 3$  cm, dans la figure de droite, carré de coté  $AB = 4$  cm dans la figure de droite,

Quelles fractions de l'aire du quadrilatère représente l'aire de

chacun des triangles AIJ, BIC et DCJ ?

Quelle fraction de l'aire du quadrilatère représente l'aire du triangle CIJ ?

