

Géométrie en quatrième avec GéoSpace

Pyramide - volume - partition d'un cube en trois ou six pyramides

Sommaire

1. Coin de Cube
2. Trois pyramides dans un cube
3. Six pyramides dans un cube
4. Pyramide équilatérale de base carrée

Technique GéoSpace : patron d'un polyèdre (menu Créer)

Faire des maths avec GéoPlan-GéoSpace : <http://debart.pagesperso-orange.fr>

Document Word : http://www.debart.fr/doc/geospace_quatrieme.doc

Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/geospace_quatrieme.pdf

Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/geospace/geospace_quatrieme.html

Page n° 85, réalisée le 5/9/2005, mise à jour le 14/11/2008

Programme de quatrième de géométrie dans l'espace

Pyramide et cône de révolution.

Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = \frac{Bh}{3}$.

L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et la fabrication de patrons.

Ces travaux permettront de consolider les images mentales relatives à des situations de parallélisme et d'orthogonalité.

La recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution peut être une activité de mise en œuvre de la proportionnalité. On pourra, à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.

Le Cours

Une pyramide est un solide composé :

- d'une base polygonale,
- de faces latérales triangulaires, ayant un sommet commun, le sommet de la pyramide.

La pyramide est régulière si la base est un polygone régulier et si la hauteur, perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, a son pied au centre du polygone de base.

Au collège les pyramides étudiées auront une base rectangulaire, souvent carrée ou bien une base triangulaire, dans ce dernier cas le solide est aussi nommé tétraèdre.

Le volume d'une pyramide (ou d'un cône de révolution) est donné par la formule :

$$\frac{1}{3} \text{ aire de la base } \times \text{ hauteur}$$

Démocrite (460-370 avant J.-C.) fut le premier à formuler l'énoncé et Eudoxe (IV^e siècle) le premier à en trouver la démonstration.

Volume d'un tronc de pyramide (ou d'un tronc de cône) (hors programme)

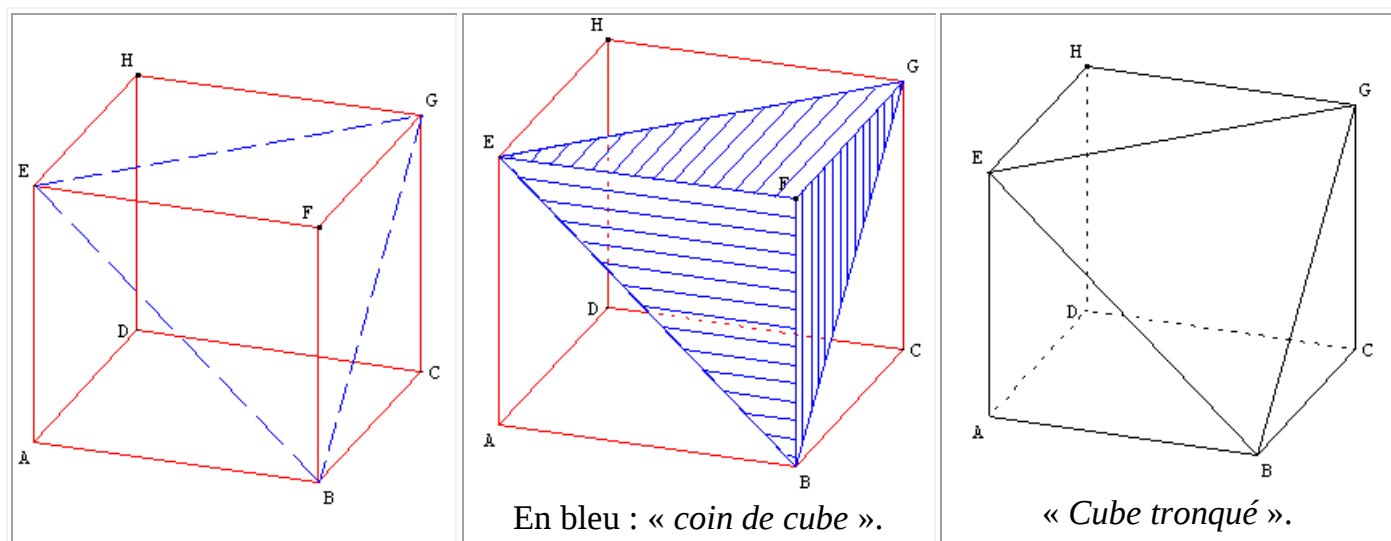
En appelant B l'aire de la grande base $ABCD$ et b l'aire de la petite base $A'B'C'D'$ et h la hauteur du tronc, le volume est alors :

$$V = \frac{h}{3} [B + b + \sqrt{Bb}]$$

Dans le cas d'un tronc de pyramide de base carrée, de côtés a et b les Égyptiens utilisaient une méthode revenant à l'emploi de la formule $V = \frac{h}{3} [a^2 + ab + b^2]$

1. Coin de Cube

On appelle "*coin de cube*" le tétraèdre trirectangle $BEGF$ formé par trois arêtes d'un cube concourantes en un sommet F , et des diagonales des faces du cube qui joignent les autres extrémités de ces arêtes.



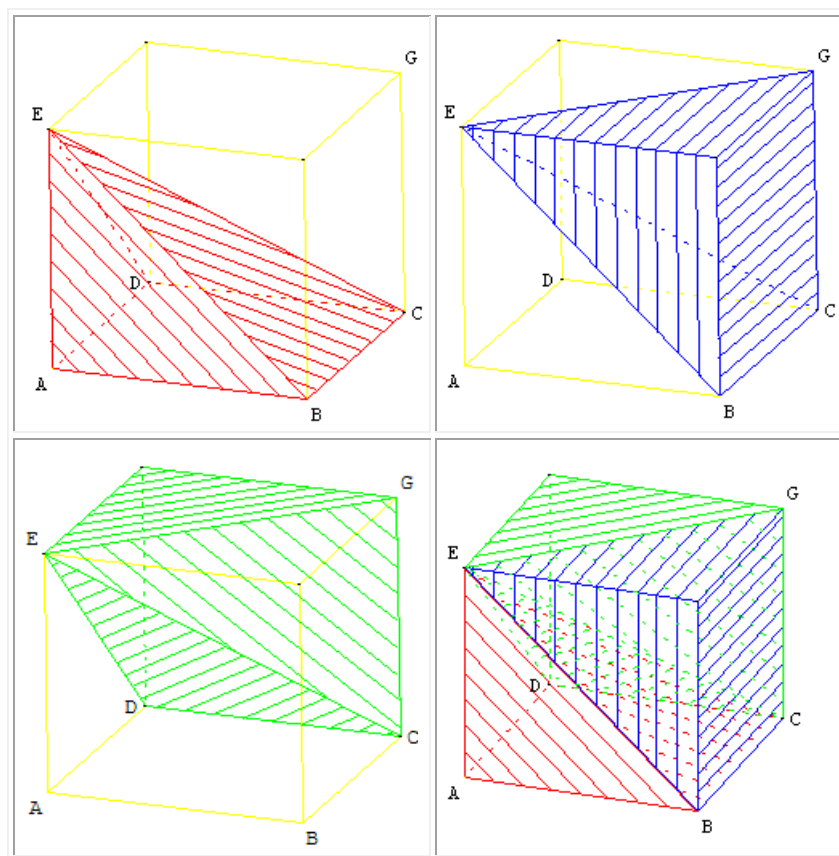
En classe de quatrième, savoir visualiser le coin de cube à partir de la figure fil de fer et savoir visualiser le cube tronqué auquel on a enlevé le coin de cube.

En classe de cinquième, voir aussi : « *cube tronqué* » aux huit sommets.

2. Trois pyramides dans un cube

Visualiser la partition d'un cube en 3 pyramides à bases carrées ayant donc le même volume.

Pour cela on va partir du cube initial ABCDEFGH et définir les 3 pyramides de même sommet E et de bases respectives les faces ABCD; BCGF et HDCG du cube.

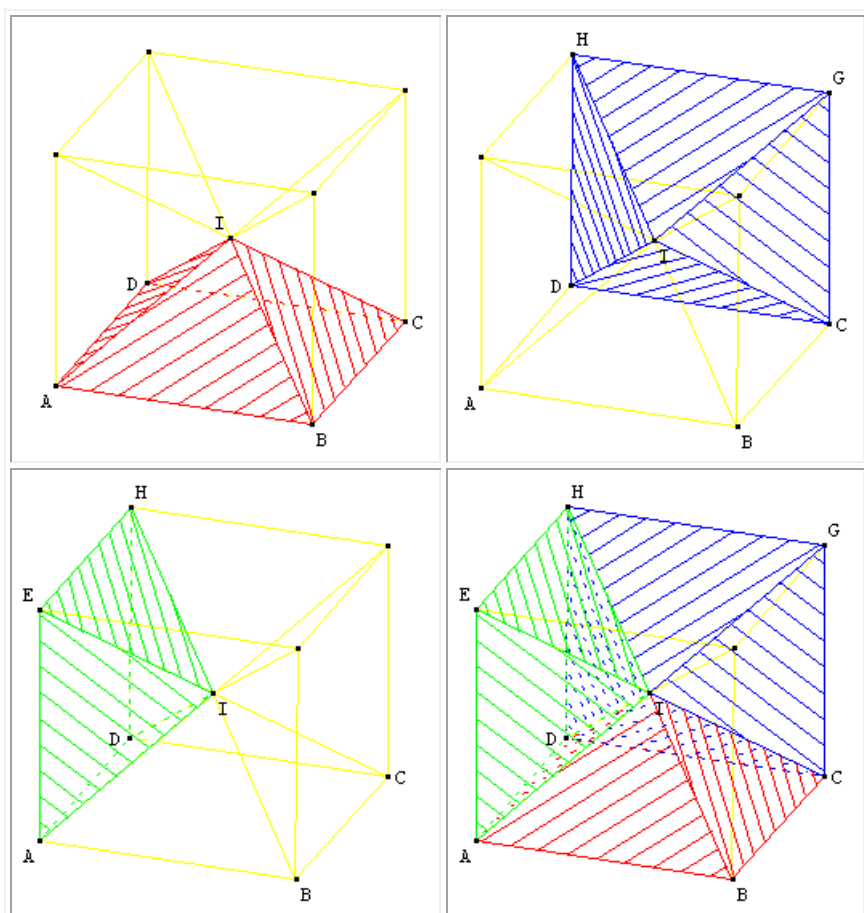


On vérifie que le volume de chaque pyramide est bien :

$$V = \frac{1}{3} \times a^3 = \frac{1}{3} \times a^2 \times a = \frac{1}{3} \times S_{\text{base}} \times \text{hauteur}.$$

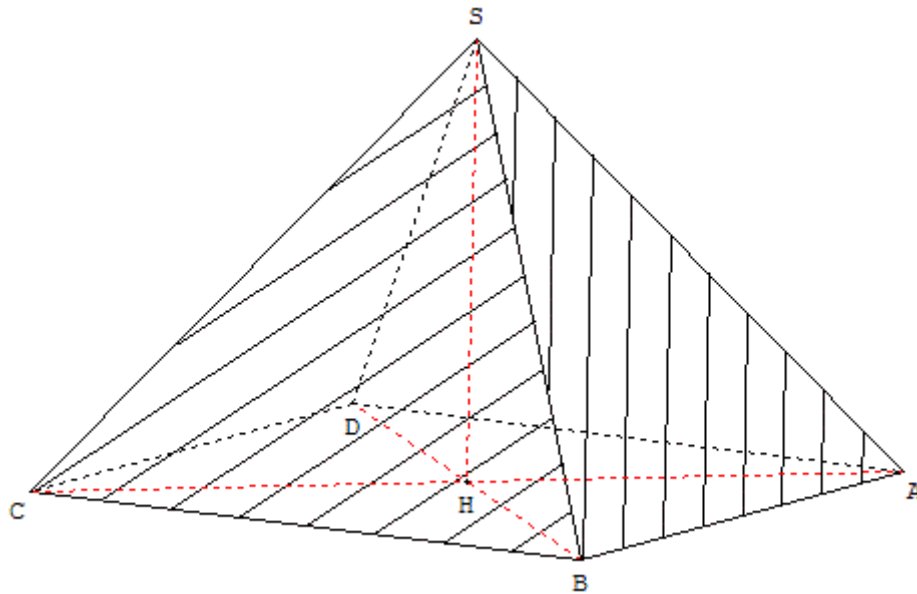
3. Six pyramides dans un cube

Dans un cube de centre I, visualiser la partition 6 pyramides régulières de bases carrées, de sommet I, ayant le même volume.



On retrouve encore le volume de la pyramide $V = \frac{1}{6} \times a^3 = \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \times S_{\text{base}} \times \text{hauteur}$.

4. Pyramide équilatérale de base carrée



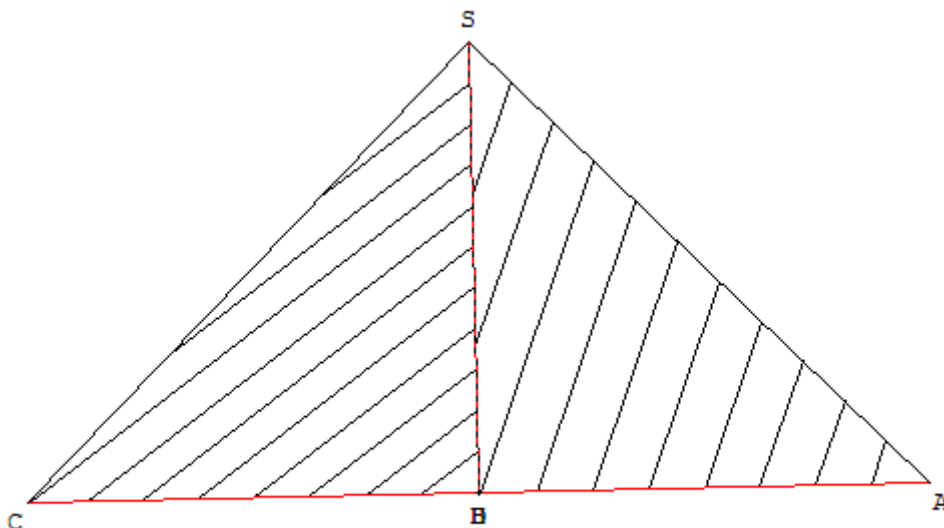
SABCD est une pyramide régulière de face carrée ABCD.
Les quatre autres faces sont des triangles équilatéraux.

Quel est l'angle des arêtes (SA) est (SC) ?

Construction avec GéoSpace

Construire un carré de côté a . Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en H. La hauteur (d) est la droite issue de H, perpendiculaire au plan ABC. S est un des points d'intersection de la hauteur (d) et de la sphère de centre A et de rayon a .

Plan diagonal



Une vue de face du plan ASC (touche F avec GéoSpace) permet de conjecturer que ASC est droit.

En effet, si a est la longueur d'une des arêtes de la pyramide, on remarque que ABC est un triangle rectangle isocèle de petits côtés a et d'hypoténuse AC.

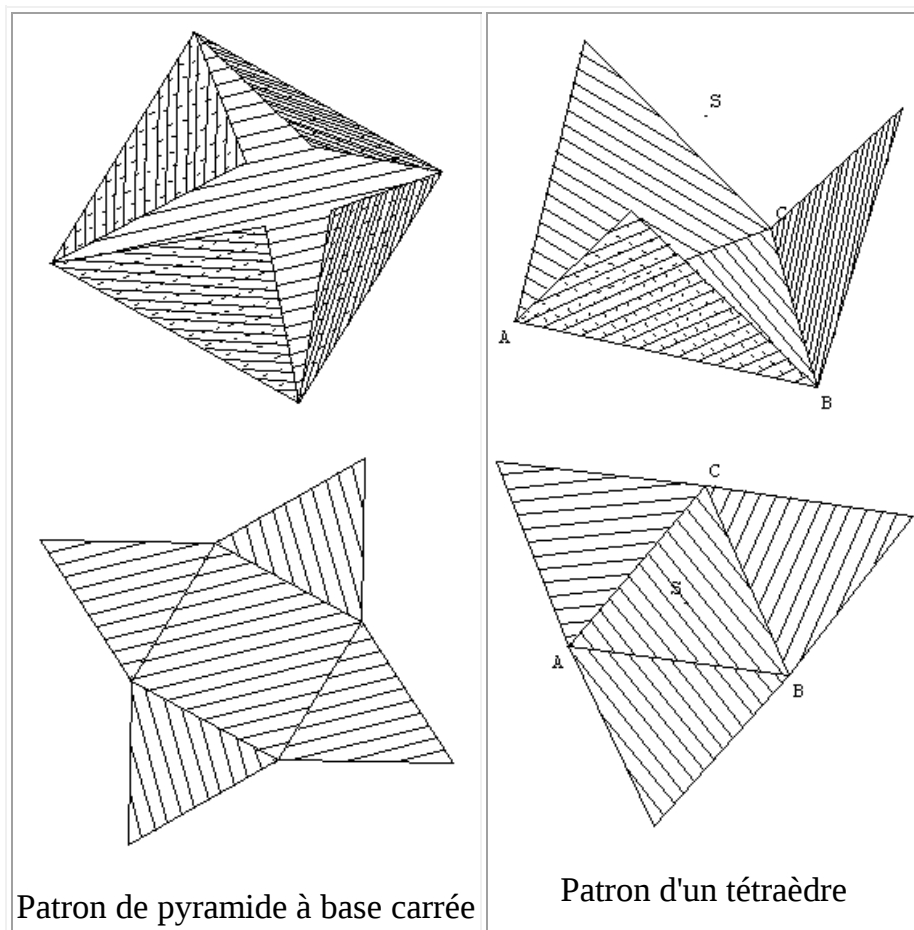
Le triangle ASB a deux côtés de longueur a et un troisième côté AC.
Il est isométrique à ABC : ASB est rectangle en S.

Technique GéoSpace : patron d'un polyèdre (menu Créer)

On obtient, parmi tous les patrons possibles, un patron choisi par le logiciel en fonction de l'ordre dans lequel ont été donnés les sommets du polyèdre lors de sa création.

Les trois premiers sommets appartenant à une même face du polyèdre définissent la *face principale* du patron et le plan dans lequel sera situé le patron lorsqu'il sera complètement ouvert ; les autres faces s'articulent autour de cette face.

En pratique si le polyèdre est une pyramide ABCDS, donner (lors de la création) en premier la liste des sommets de la future base principale ABCD dans cet ordre.



Le coefficient d'ouverture du patron est une variable réelle libre, m dans mes exemples, comprise entre 0 et 1 ; si elle est égale à 1 le patron est plan, si elle est égale à 0 le patron coïncide avec le polyèdre. Pour ouvrir un patron par étapes, il suffit de piloter cette variable au clavier.