Méthode d'Euler en 1S

Construction point par point d'une courbe intégrale avec GéoPlan.

Faire des maths… avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr
Document Word : http://www.debart.fr/doc/methode_euler.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/methode_euler.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/1s/methode_euler.html

Document n° 32, réalisé le 12/2/2003, modifié le 29/8/2005

Recherche de primitive

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I = $[x_0, x_n]$ et un réel y_0.
On cherche : une fonction F, dérivable sur I, telle que $F(x_0) = y_0$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Principe de Méthode d'Euler

Lorsqu'on ne sait pas trouver une formule explicite de F(x), la méthode d'Euler permet de tracer une courbe approchée de celle de F.

Propriété de la dérivée :

Si F est une fonction dérivable sur un intervalle I et x_i un réel de I.
Pour tout réel h non nul et proche de 0 tel que $x_i + h$ soit dans I on a :

$$F(x_i + h) \approx F(x_i) + h\,F'(x_i)$$

Méthode d'Euler :

A_0 $(x_0\,;\,y_0)$ est le premier point de la courbe (C) représentative de F.

Soit h un réel non nul, proche de 0 ; en général on divise I en n intervalles et on choisit $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.

Pour les n valeurs $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, …, $x_n = x_{n-1} + h$, on calcule de proche en proche, grâce à la propriété de la dérivée citée ci-dessus, les n valeurs approchées de $F(x_1)$, $F(x_2)$, …, $F(x_n)$.

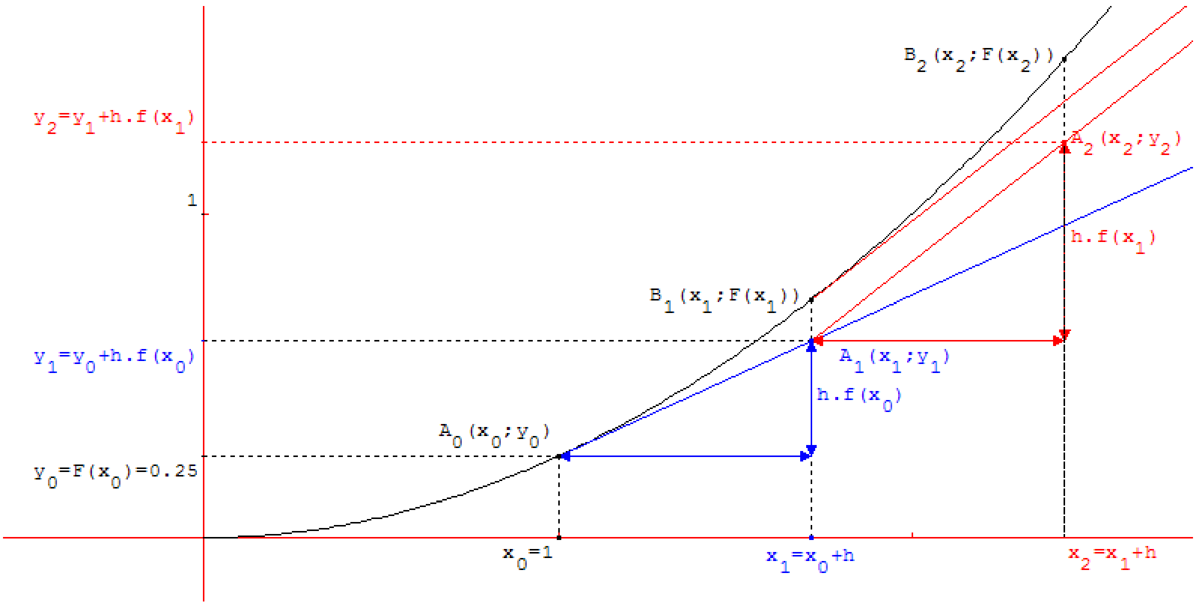
En effet F est dérivable en x_0 donc :
$F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$ soit $F(x_1) \approx y_0 + h\,f(x_0)$.
En calculant $y_1 = y_0 + h\,f(x_0)$ on obtient $F(x_1) \approx y_1$.
On recommence en x_1 avec :
$F(x_1 + h) \approx F(x_1) + h\,F'(x_1)$ soit $F(x_2) \approx y_2 = y_1 + h\,f(x_1)$.
Et ainsi de suite on répète n itérations jusqu'à $y_n = y_{n-1} + h\,f(x_{n-1})$.

Représentation graphique

On place ensuite, par exemple avec le logiciel GéoPlan, les points M_0 $(x_0\,;\,y_0)$; $M_1(x_1\,;\,y_1)$; $M_2(x_2\,;\,y_2)$; … ; $M_n(x_n\,;\,y_n)$.
La courbe constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, …,$[A_{n-1}A_n]$ approche la courbe exacte (C) de F. Cette courbe approchée représente une fonction affine par intervalles.

Application 1

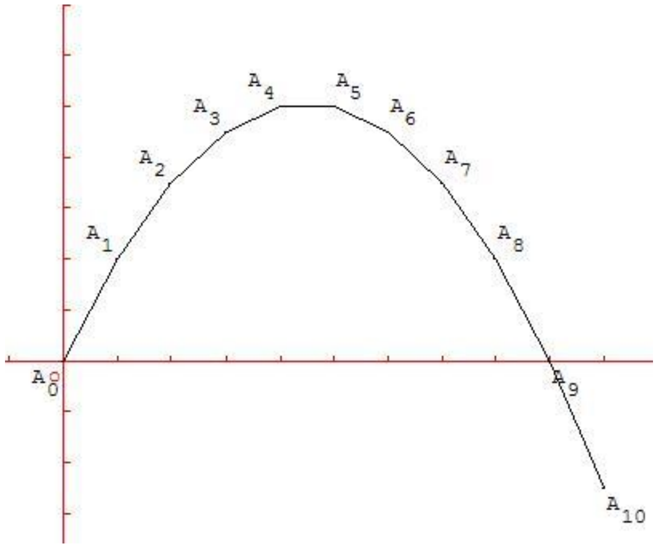
La fonction $f(x) = \dfrac{x}{2}$ a pour primitive $F(x) = \dfrac{x^2}{4}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = F(x_0) = \dfrac{1}{4}$.

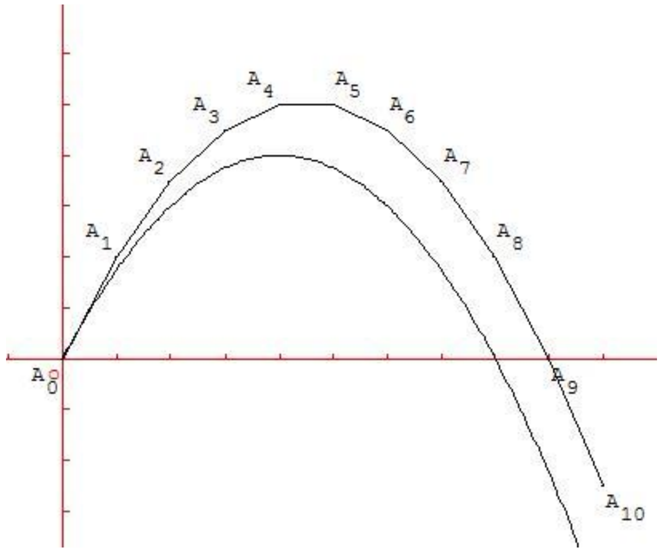


La courbe (C) est approchée par $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$.

Application 2

Étude de $f(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$



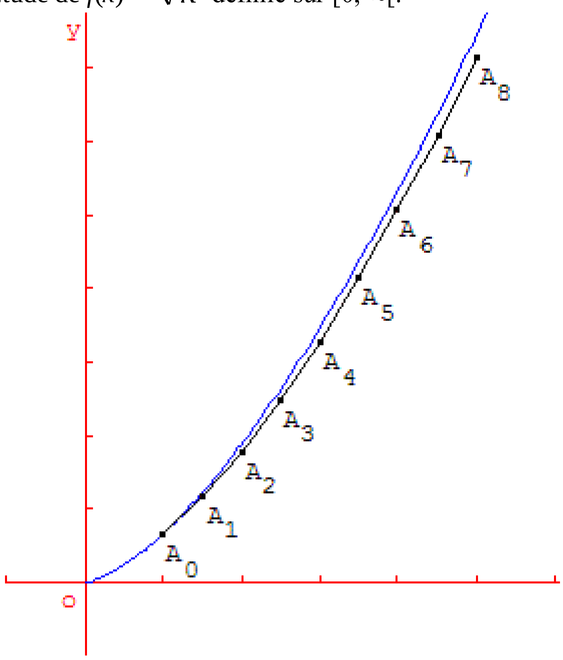


Condition initiale $y_0 = F(x_0) = 0$ pour $x_0 = 0$.
Tracé de 10 points avec GéoPlan avec $h = 1$.

Dans la figure de droite a été représenté le graphe (*C*) de $F(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$ primitive de f telle que $F(0) = 0$.

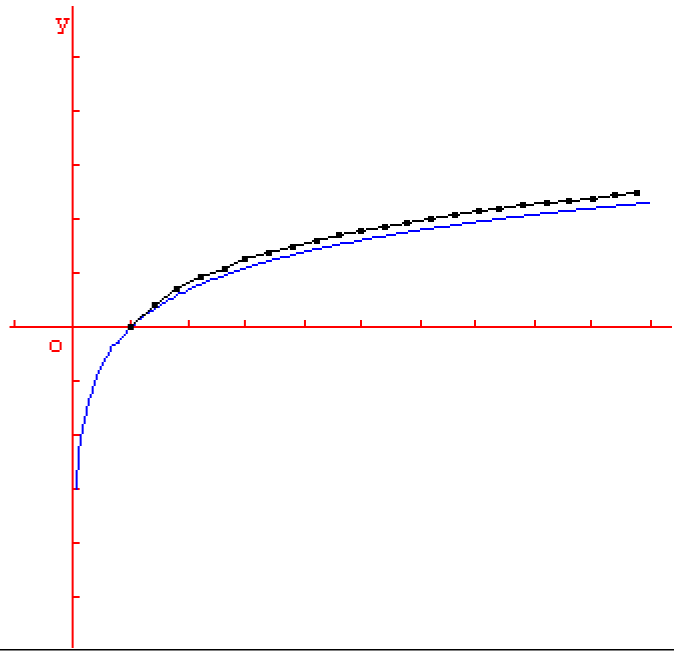
Exemple 3 : fonction racine

Étude de $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0, \infty[$.



Exemple 4 : fonction logarithme

Étude de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, \infty[$.



On peut constater sur ces exemples qu'avec un pas petit, la méthode d'Euler donne facilement des approximations très précises.