Problèmes d'optimisation avec GéoPlan

Exercices à prise d'initiative.

Sommaire

Faire des maths … avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Ce document PDF : http://www.debart.fr/pdf/optimisation.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/1s/optimisation.html

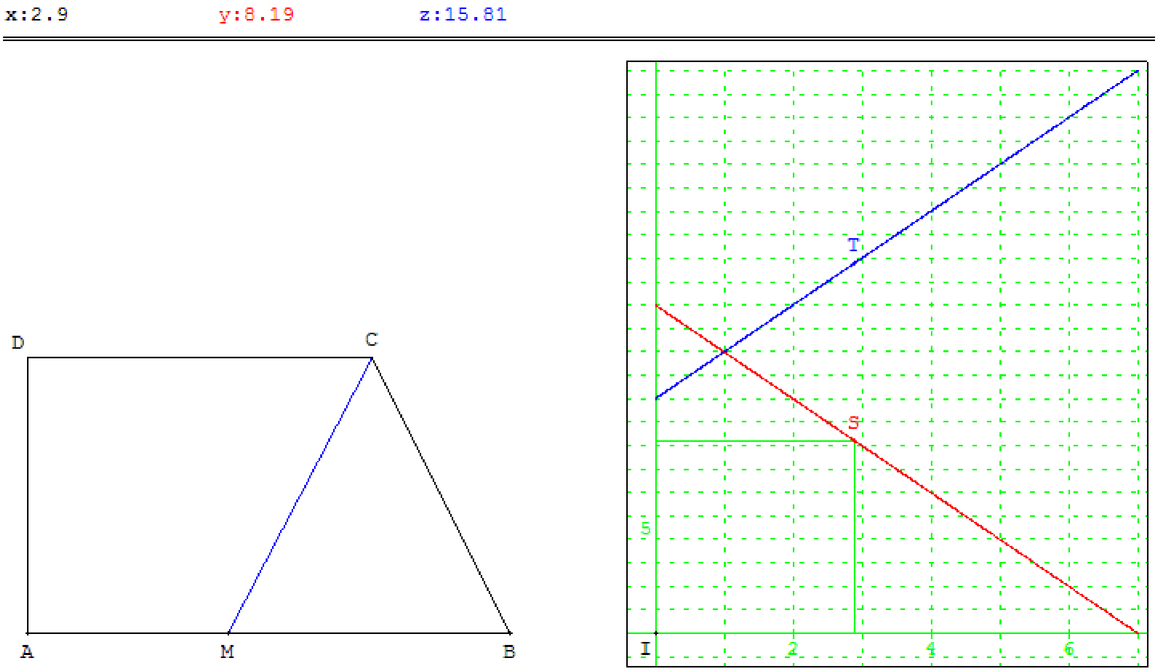
Document n° 105, réalisé le 21/3/2007, mis à jour le 25/3/2009

1. Partage en deux d'un trapèze

ABCD est un trapèze rectangle de grande base [AB].
Trouver un point M du segment [AB] tel que [CM] partage le trapèze ABCD en deux parties d'aires égales.

On note :

- x la longueur AM
- $f(x)$ l'aire du triangle CMB
- $g(x)$ l'aire du trapèze AMCD.



Le graphique de droite représente ces deux aires en fonction de x.
En vous aidant du graphique, retrouvez la position du point M.

Indications : cas particulier AB = 7 et DC = 5

AB = b = 7, AM = x, DC = c = 5, AD = h = 4.

L'aire du triangle CMB est MB × AD = $(b - x) \times h$.

L'aire du trapèze AMCD est (AM + CD) × AD = $(x + c) \times h$.

$f(x) = 2(7 - x)$ et $g(x) = 2(x + 5)$. L'égalité est vérifiée pour $x = 1$.

Cas général AB = b et DC = c

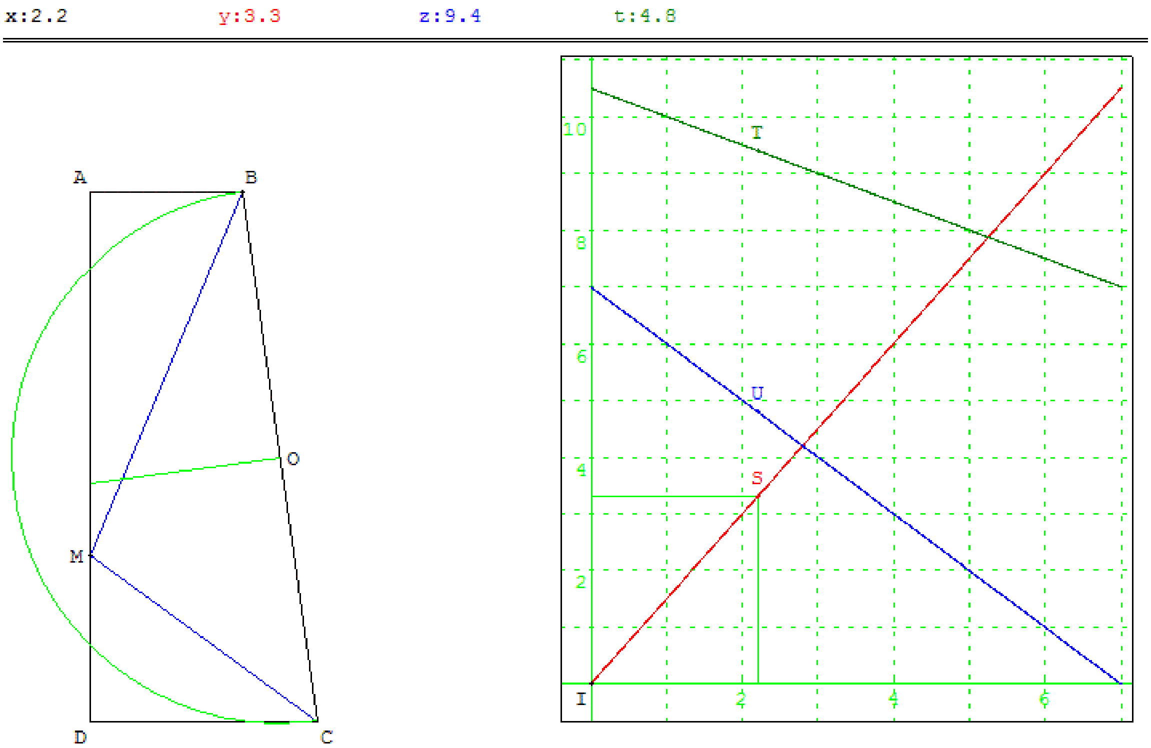
On trouve $x = (b - c)/2$. La solution est indépendante de la hauteur du trapèze.

2. Partage d'un trapèze

ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD] et de hauteur [AD] tel que AB = 2, AD = 7 et DC = 3.

M est un point mobile du segment [AD].

On appelle T_1 le triangle DMC ; T_2 le triangle BCM et T_3 le triangle ABM.



Partie 1

a. Trouver la position de M pour que l'aire de T_1 soit égale à $\dfrac{3}{2}$ (touche 1 avec GéoPlan).

b. Dans ce cas, préciser la nature de T_2, justifier.
c. Y a-t-il une autre position de M pour que T_2 soit de même nature ? (touche 2 avec GéoPlan)

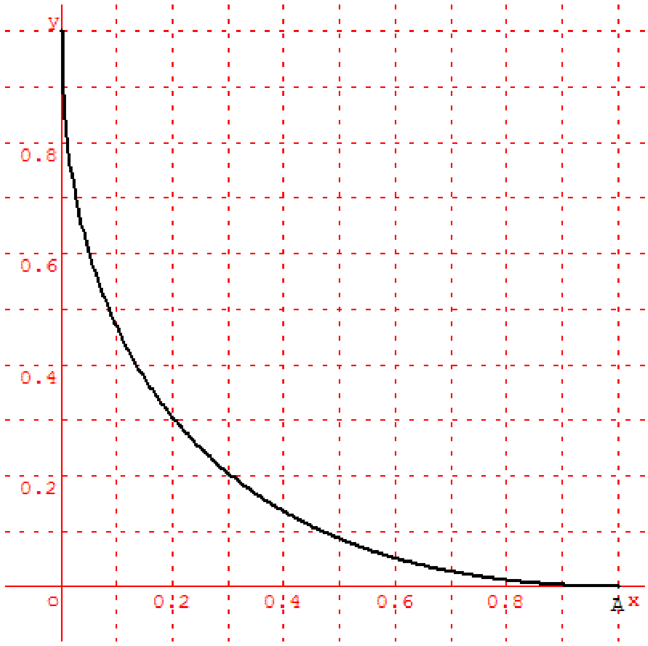
Partie 2

Déterminer toutes les positions de M pour que :
a. $aire(T_3) < aire(T_1)$
b. $aire(T_1) < aire(T_2)$
c. $aire(T_3) < aire(T_1) < aire(T_2)$

Partie 3

Peut-on trouver M sur [AD] pour que T_2 soit isocèle en M ? (touche 3 avec GéoPlan)

3. Arc de cercle ?



Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :
$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.

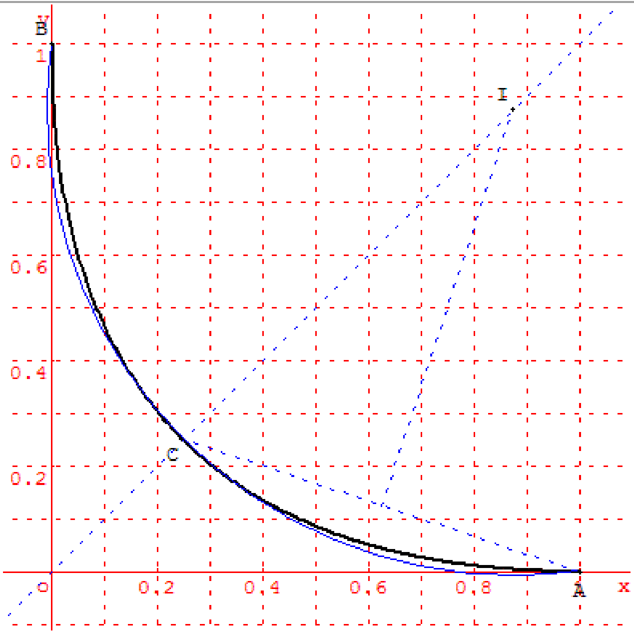
La courbe représentative Γ de la fonction f dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.

• Montrer que le point M de coordonnées (x, y) appartient à Γ si et seulement si :
$x \geq 0$, $y \geq 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

• Montrer que Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

• Si Γ était un arc de cercle, quel pourrait être son centre?
Quel pourrait être son rayon ?

• La courbe Γ est-elle un arc de cercle ?



De l'équation $y = x - 2\sqrt{x} + 1$, on trouve
$y = (1 - \sqrt{x})^2$.
Comme $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ et on peut calculer la racine carrée :
$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$ soit $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Cette équation est symétrique en x et y : si un point M(x, y) appartient à Γ, alors M'(y, x) est aussi sur Γ. L'axe $(O, \vec{i} + \vec{j})$ d'équation $y = x$ est axe de symétrie de la courbe.

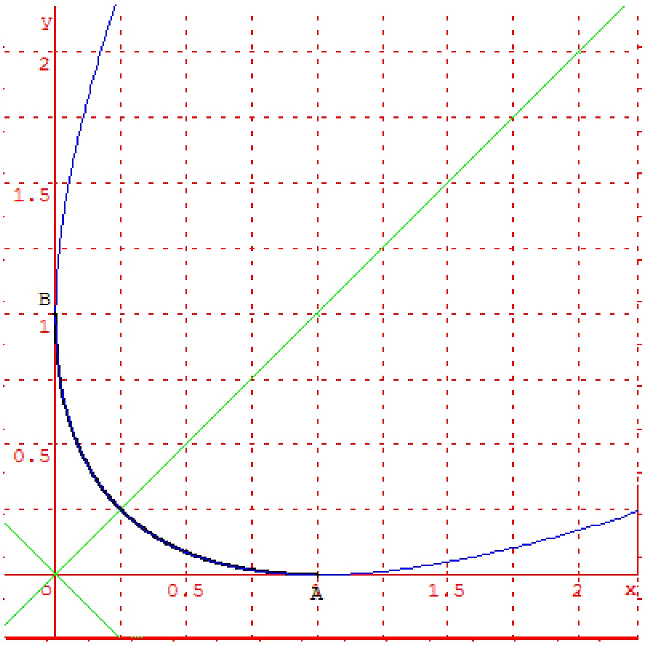
Cette droite coupe Γ au point C tel que $2\sqrt{x} = 1$ donc $x = y = \dfrac{1}{4}$.

Si Γ était un arc de cercle, il passerait par A, B et C.
Son centre I serait situé sur l'axe $(O, \vec{i} + \vec{j})$, médiatrice de [AB], et sur la médiatrice de [AC].
Cette dernière droite, perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ en J$(\frac{5}{8}, \frac{1}{8})$, a pour coefficient directeur 3 et pour équation :
$y = 3x - \frac{7}{4}$. Les deux médiatrices se coupent au point K tel que $x = y = \frac{7}{8}$.

Justification

De l'équation $y = x - 2\sqrt{x} + 1$, on trouve $2\sqrt{x} = x - y + 1$ et en élevant au carré :
$4x = (x - y + 1)^2 = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$.

Le terme $2xy$ de l'équation $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$ fait que Γ n'est pas un arc de cercle, mais un arc de conique, plus particulièrement de parabole.



Avec GéoPlan, taper P permet de visualiser la parabole contenant Γ.

Démonstration

En raison de la symétrie on est donc amené à étudier la courbe dans le nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ avec : $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$

Pour un point $M(x, y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, dans le nouveau repère M a pour coordonnées (X, Y) avec $\overrightarrow{OM} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J}$.

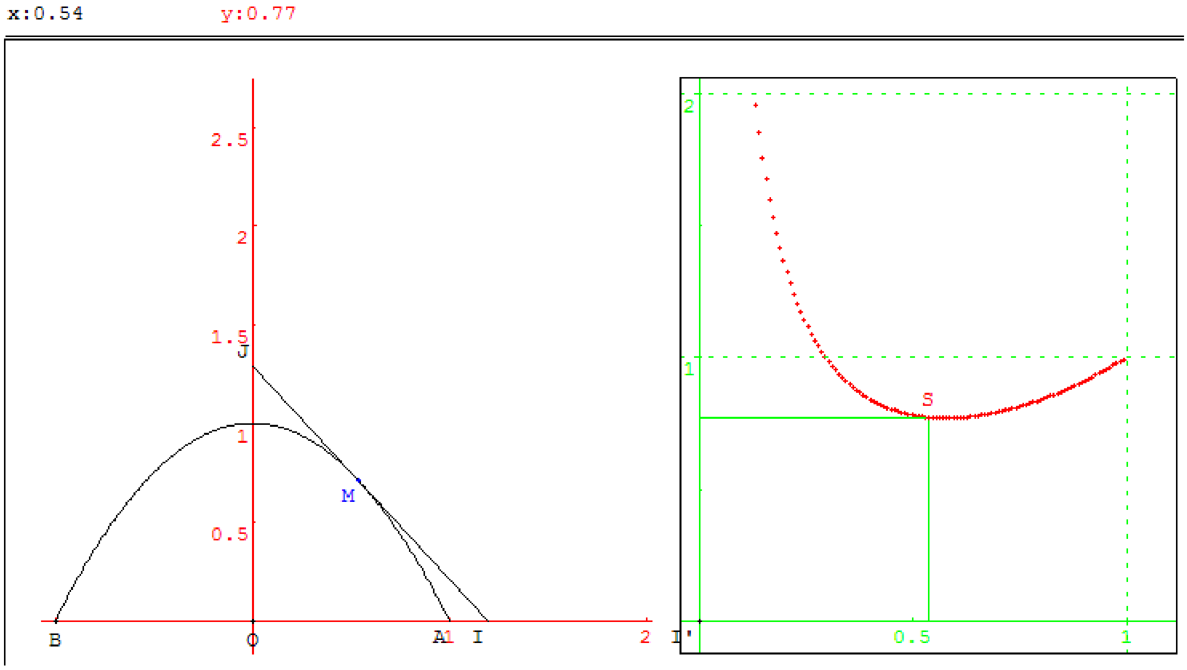
$X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} = X\,(\vec{i} - \vec{j}) + Y(\vec{i} + \vec{j}) = X\,\vec{i} - X\,\vec{j} + Y\,\vec{i} + Y\,\vec{j} = (X + Y)\,\vec{i} + (Y - X)\vec{j}$.

En identifiant avec $x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, on trouve les formules de changement de variable :
$x = X + Y$
$y = Y - X$.

Remplaçons par les nouvelles coordonnées dans l'équation :
$(X + Y)^2 + (Y - X)^2 - 2\,(X + Y)(Y - X) - 2(X + Y) - 2(Y - X) + 1 = 0.$

Soit $4X^2 - 4Y + 1 = 0$. Γ est un arc de la parabole d'équation $Y = X^2 + \frac{1}{4}$.

4. Tangente à la parabole et aire minimum



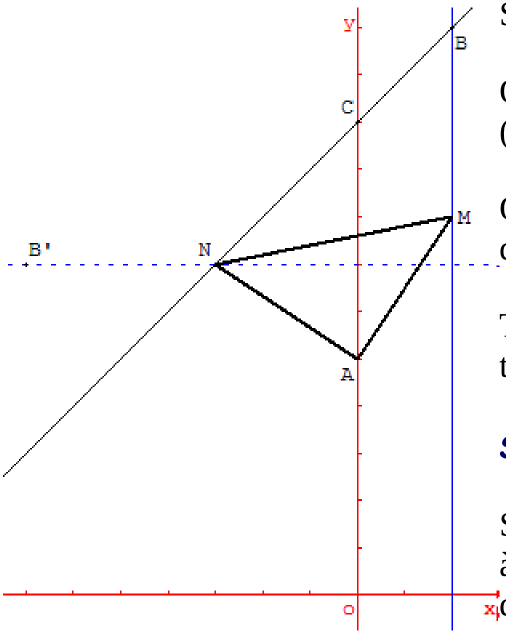
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

a. Soit g a fonction définie sur]-1, 1[par $g(x) = 1 - x^2$. Tracer la courbe (C) représentative de g.

b. Soit x un nombre réel non nul élément de l'intervalle]0 ; 1]. On appelle M le point de (C) d'abscisse x.
On appelle (T) la tangente en M à la courbe (C).
(T) coupe l'axe des abscisses en I et l'axe des ordonnées en J.

Pour quelle valeur de x l'aire du triangle OIJ est-elle minimum ?

5. Triangle rectangle isocèle avec contraintes



Soit (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) un repère orthonormal direct du plan.

On considère trois points A , B , C de coordonnées respectives (0, 5) ; (2, 12) ; (0, 10).

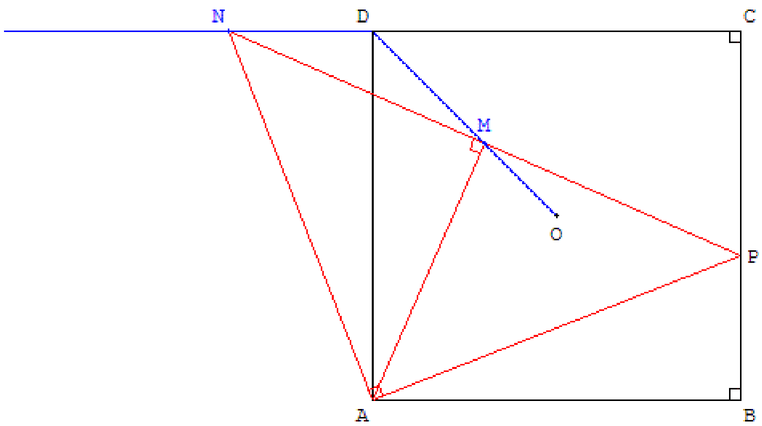
On appelle (d_1) la parallèle à l'axe (O*y*) passant par B et (d_2) la droite (BC).

Trouver un point M sur (d_1) et un point N sur (d_2) tels que le triangle AMN soit rectangle isocèle direct en A.

Solution

Si le triangle rectangle isocèle AMN existe, le point M est obtenu à partir du point N par une rotation de 90° autour de A. Cela nous donne une méthode de construction du triangle qui répond à la question :
on fait pivoter la droite (d_1) de 90° autour de A. La transformée (d') coupe (d_2) en N. Le point de (d_1) dont N est l'image est le point M.

6. Lieux géométriques



Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$), on considère le carré ABCD de centre O, soit P un point de [BC].

On appelle N l'image de P par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et M le milieu de [NP].

Déterminer les lieux des points N et M lorsque P décrit [BC].

Commandes GéoPlan

Touche T: tracé point par point des lieux,
Touche S pour sortir du mode trace,
Touche L : dessin en bloc des lieux

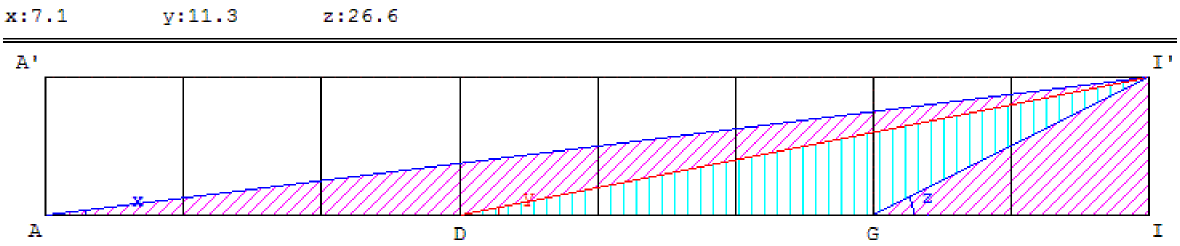
Indications

D' étant le symétrique de C par rapport à D, D et D' sont les images de B et C par la rotation. Le lieu du point N est le segment [DD'] porté par la droite (CD).

Le triangle ANP est rectangle isocèle. M est donc l'image de P par la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. O et D sont les images de B et C par la similitude. Le lieu du point M est le segment [OD].

7. Huit carrés - Somme de trois angles

On aligne comme sur la figure ci-dessous huit carrés égaux.
Quelle est la somme des trois angles marqués *x*, *y* et *z* ?



La somme des trois angles vaut 45°.

8. Évacuation des eaux

ÉduSCOL - Terminale S - Banque de sujets 2007 - Sujet 003

Environnement informatique

- Logiciel de géométrie dynamique.
- Type d'utilisation : par les élèves en salle informatique.
- Matériel : un ordinateur par élève.

Objectifs et moyens possibles

- Objectifs : entraînement à l'épreuve pratique du bac S.
- Moyens : contrôle intermédiaire et final du travail de l'élève.

Prérequis informatiques

- Utilisation élémentaire de GéoPlan.

Prérequis mathématiques

- Trigonométrie et fonction.

Compétences TICE

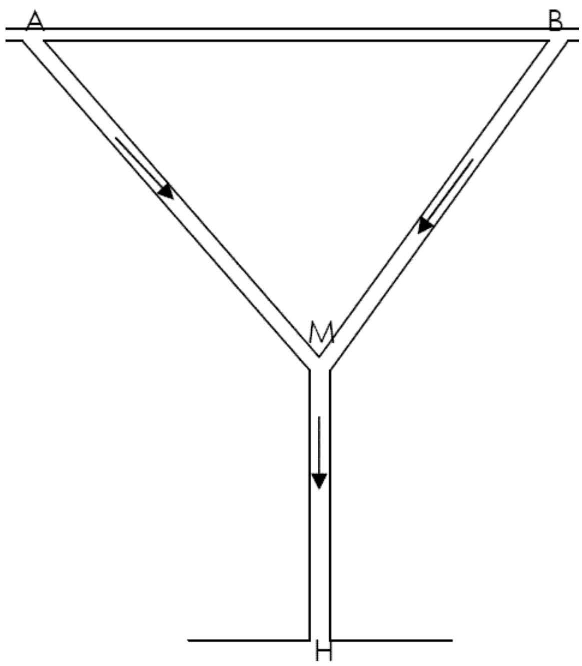
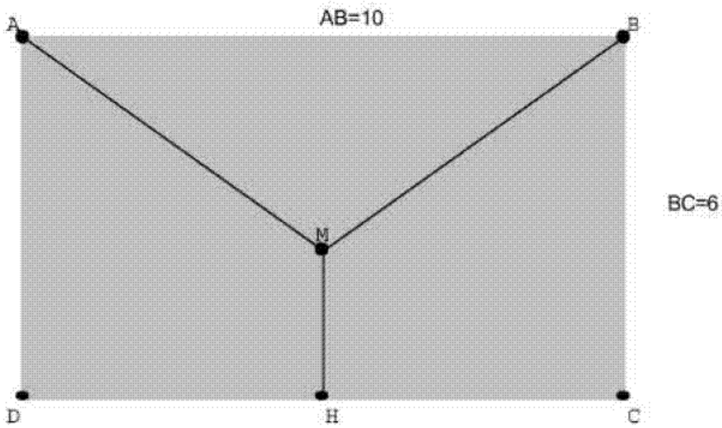
- Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
- Tester les conjectures émises ;
- Traduire, à l'aide du logiciel, une situation géométrique par un graphique.

Compétences mathématiques

- Émettre une conjecture en croisant des informations variées : observation d'une figure dynamique, données numériques et graphiques ;
- Élaborer une stratégie permettant de déterminer l'extremum d'une fonction.

Situation

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur un mur aveugle, à l'arrière de la façade d'une maison.
Sur ce mur, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

La figure ci-dessous est un schéma d'un système d'écoulement des eaux :	On le schématise par la figure suivante, où les distances sont exprimées en mètres :
	

Sur ce plan, (MH) est la médiatrice de [DC].
Il s'agit de trouver, sur le mur de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.

On note Q la projection de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu BMQ = θ.

Travail demandé

1. À l'aide du logiciel GéoPlan, ouvrir la figure «Optimisation.g2w». Elle comprend le repère de base ainsi qu'un second repère de centre I.
Construire le rectangle ABCD, puis définir la médiatrice de [DC] ainsi que le point libre M sur cette droite.
Définir la variable numérique *s* égale à la somme MA + MB + MH ainsi que *e* égale à la valeur en radian de l'angle BMQ, puis l'affichage de ces deux valeurs.

(Facultatif) : Représenter dans le repère d'origine I le point S d'abscisse *e* en choisissant des coordonnées adaptées.

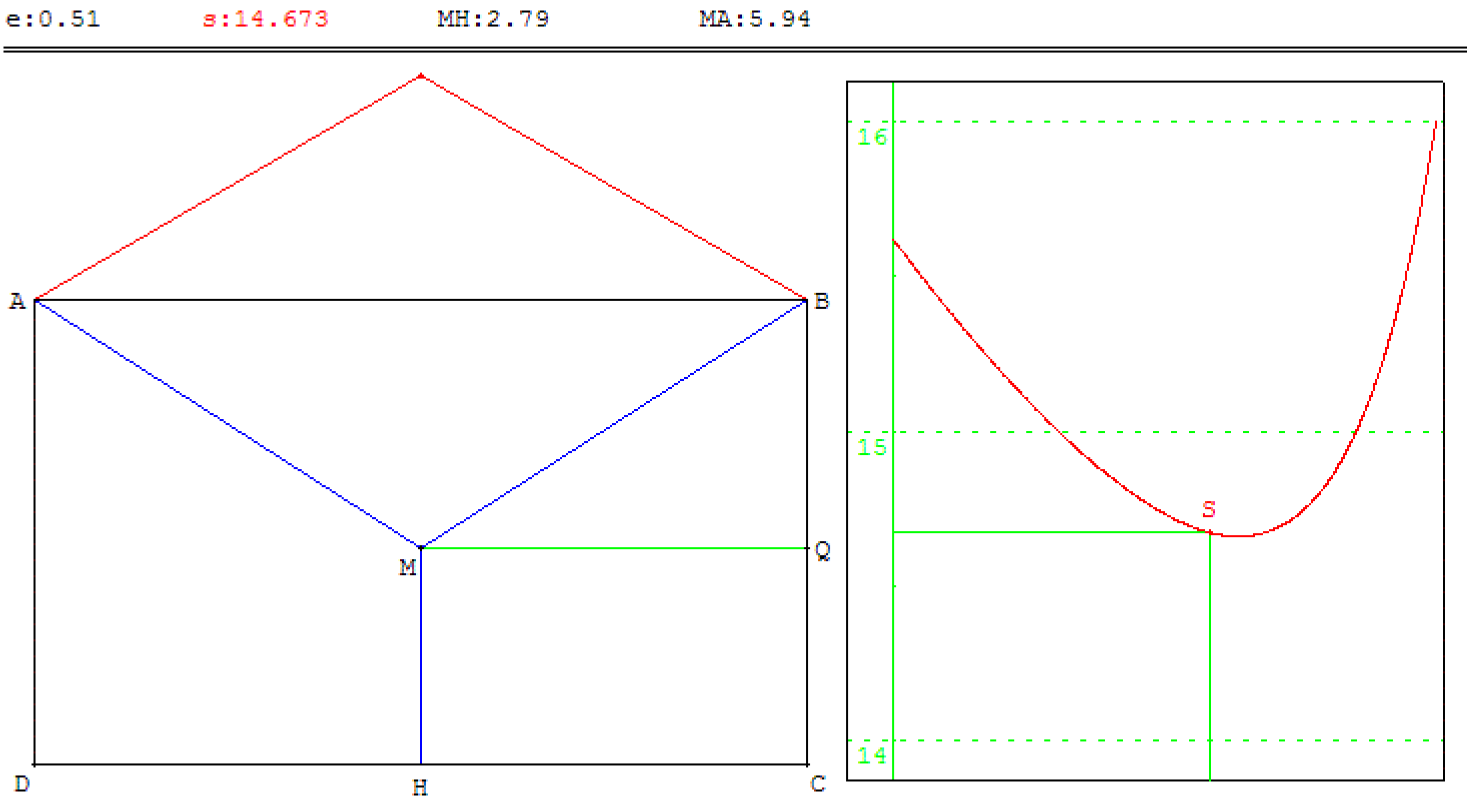
À l’aide de la figure ainsi conçue, déterminer une valeur approchée de la mesure de l’angle BMQ en radian qui donne une somme *s* minimale, ainsi que la valeur approchée de cette somme.

2. On définit la fonction $g : \theta \to g(\theta) = 2\text{MA} + \text{MH}$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) on note *g’* la dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta) = 5 \times \frac{2\sin\theta - 1}{(\cos\theta)^2}$.
(b) déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Figure avec GéoPlan

Une possibilité de représentation est donnée par la figure ci-dessous :



Indications

MQ = MB cos θ, d'où MA = MB = MQ/cos θ = 5/cos θ.
BQ/MQ = tan θ, d'où BQ = MQ tan θ = 5 tan θ ; MH = QC = BC - BQ = 6 - 5 tan θ.

$g(\theta) = 2\text{MA} + \text{MH} = 10/\cos\theta + 6 - 5\tan\theta = (10 + 6\cos\theta - 5\sin\theta)/\cos\theta$.

La dérivée *g’* est nulle si $2\sin\theta - 1 = 0$; $\sin\theta = \frac{1}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{6}$. $g(\theta) = 5\sqrt{3} + 6 \approx 14{,}66$.