Le parallélogramme au collège
Translation

Dessiner un parallélogramme, théorème de Varignon, parallélogramme avec contraintes.

Sommaire

Faire des maths… avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Ce document PDF : http://www.debart.fr/pdf/parallelogramme_college.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/college/parallelogramme_translation_classique.html

Document n° 74, réalisé le 20/7/2004, modifié le 4/4/2008

Quadrilatère convexe, concave, croisé

Un quadrilatère ABCD est un polygone qui a quatre côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Les points A et C d'une part ; B et D d'autre part, sont les sommets opposés du quadrilatère.
Les diagonales [AC] et [BD] sont les segments qui joignent deux sommets opposés.

Un quadrilatère est convexe si les deux diagonales sont à l'intérieur du quadrilatère.
Un quadrilatère est concave si (au moins) une des diagonales est à l'extérieur du quadrilatère.
Un quadrilatère est croisé si les deux diagonales sont à l'extérieur du quadrilatère. Un quadrilatère croisé est concave.

Propriétés caratéristiques

Les quatre propriétés suivantes d'un quadrilatère convexe sont équivalentes et définissent chacune un parallélogramme :

- ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,
- Les côtés opposés sont parallèles deux à deux,
- les côtés opposés sont la même longueur deux à deux,
- Les diagonales se coupent en leur milieu,
- Les angles opposés ont la même mesure,
- Les angles consécutifs sont supplémentaires (leur somme fait 180°).

Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est son centre de symétrie et son centre de gravité.
Les diagonales partagent le parallélogramme en quatre triangles de même aire.

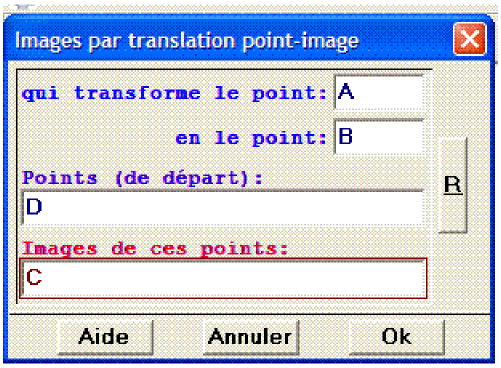
1.A. Dessiner un parallélogramme à partir de trois sommets

Le but de ce chapitre est de dessiner des quadrilatères qui gardent leurs propriétés lorsque l'on déplace leurs sommets. En général, ces figures s'obtiennent à partir de trois points libres A, B et D. L'ordinateur calcule la position du point C (point lié qui ne peut pas être déplacé).

Placer trois points A, B et D, dessiner les segments [AB] et [AD], et trouver le point C qui complète le parallélogramme en utilisant une des quatre méthodes ci-dessous correspondant aux quatre définitions proposées plus haut.

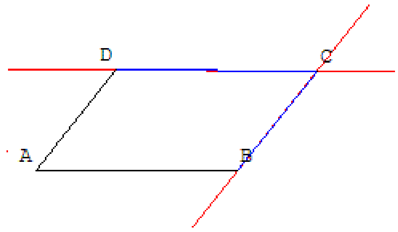
a. Avec une translation

À partir de la classe de quatrième, utiliser la définition :
ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
Dans le menu « *point > point image par* » choisir :



b. En utilisant le parallélisme

Tracer les parallèles à (AB) passant par D et à (AD) passant par B,
nommer C le point d'intersection de ces deux parallèles.



Compléter le parallélogramme avec les segments [BC] et [DC],
gommer les constructions (non dessiné).

Commandes GéoPlan

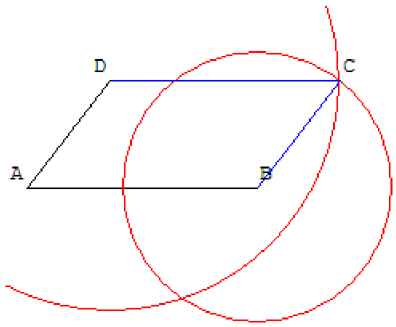
Déplacer les points A, B ou D et vérifier que ABCD est bien un parallélogramme.
Touche M : Masquer les constructions.

Construire un parallélogramme ABCD connaissant les longueurs de deux côtés consécutifs et la longueur d'une diagonale.

Voir : problèmes de construction (à la règle et au compas)

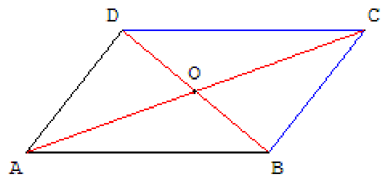
c. Avec le compas (méthode la plus précise avec papier et crayon)

Dans le menu numérique - calcul géométrique, nommer r_1 la longueur AB et r_2 la longueur AD. Tracer les cercles de centres D de rayon r_1 et de centre B de rayon r_2. C est le point d'intersection de ces deux cercles situé dans l'angle BÂD.



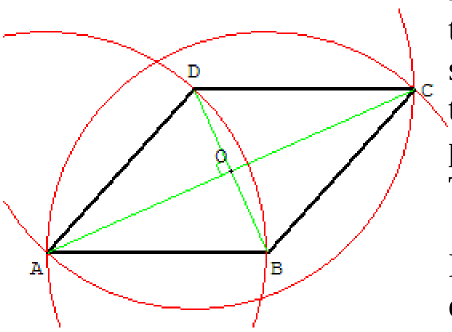
d. Symétrie par rapport au milieu des diagonales

Tracer le milieu O de [BD].
Tracer le point C symétrique de A par rapport au point O :
dans le menu « *point > point image par* » choisir :
symétrie centrale de centre O, A point de départ, image de ce point : C.



1.B. Cas particuliers : dessiner un losange

a. À partir d'un côté [AB]



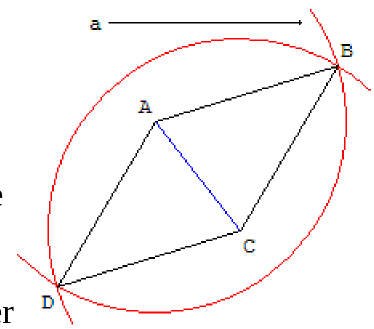
Placer A et B et dessiner le segment [AB],
tracer le cercle de centre B passant par A, placer un point libre C sur le cercle et tracer [AC],
tracer les cercles de centre A et C passant par B, D est le deuxième point d'intersection des cercles.
Tracer les segments [CD] et [AD].

Il est possible de tracer les diagonales et de marquer leur angle droit.

Commandes GéoPlan

Touche M : Masquer les constructions,
Touche D : afficher les Diagonales.

b. À partir d'une diagonale [AC]



Placer deux points A et C, tracer un cercle (c) de centre A de rayon a supérieur à AC/2.
Tracer un cercle (c') de même rayon et de centre C.

Les cercles (c) et (c') se coupent en B et D. La droite (BD) est la médiatrice du segment [AC].

Tracer le quadrilatère ABCD et montrer que ABCD est un losange, marquer

les égalités de côtés.
Marquer le centre O, l'angle des diagonales et remarquer les droites parallèles.

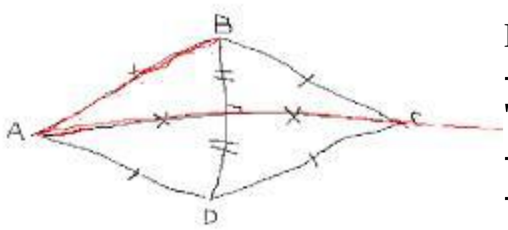
Les "anciens Égyptiens " utilisaient cette méthode, par exemple dans la construction des pyramides, pour tracer un angle droit :
prendre une corde, faire un nœud au milieu et fixer les deux extrémités sur deux piquets placés en A et C. Tendre la corde de part et d'autre de (AC) en la prenant par le nœud et marquer les points B et D, puis le centre O.

c. À partir d'un côté et de la direction d'une diagonale

Projet de document d'accompagnement - Géométrie - Janvier 2007

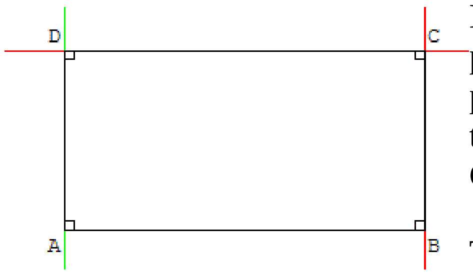
Construire un losange ABCD.
Données : le segment [AB] *et la demi-droite* [Ax), *support de la diagonale* [AC].

(Figure d'analyse proposée par un élève)



L'activité de l'élève comporte plusieurs points essentiels :
- l'analyse grâce à une représentation à main levée de la figure "visée" pour matérialiser la situation ;
- l'identification des propriétés pertinentes ;
- les codages associés ;
- les différentes procédures de résolution (par les côtés/par les diagonales) ;
- la formulation (rédaction de la propriété utilisée) d'une argumentation.

1.C. Dessiner un rectangle



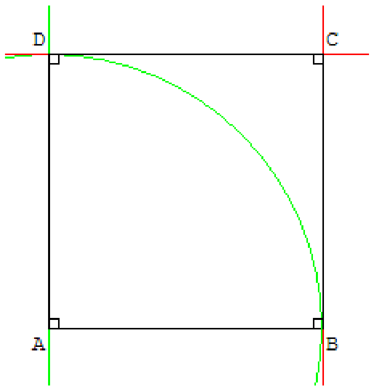
Dessiner le segment [AB], tracer la perpendiculaire à [AB] passant par A,
placer un point D sur la perpendiculaire,
tracer les parallèles à (AB) passant par C et à (BC) passant par A,
C est le point d'intersection de ces deux parallèles.

Tracer les segments [BC], [CD] et [AD].

Il est possible de dessiner les diagonales et le cercle circonscrit au rectangle.

Commandes GéoPlan
Touche M : Masquer les constructions,
Touche D : afficher les Diagonales,
Touche C : afficher le Cercle circonscrit et son centre O.

1.D.a. Carré : construction à partir d'un côté [AB]

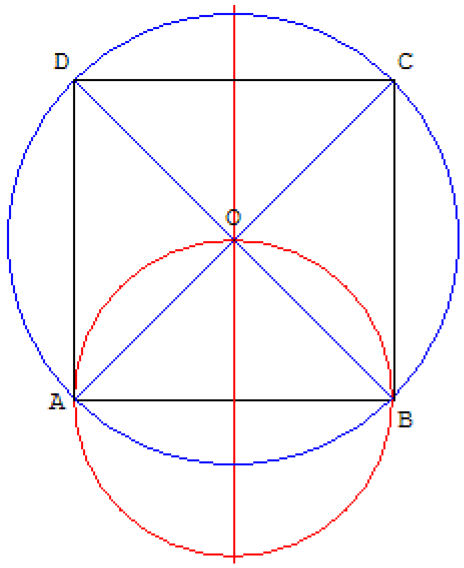


Placer deux points A et B et dessiner le segment [AB],
tracer la perpendiculaire à [AB] passant par B et le cercle de centre B passant par A.
Le sommet D est un des points d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle.
Construire les perpendiculaires à (AB) en B et à (AD) en D.
Construire le point C comme intersection de ces deux perpendiculaires.

ABCD est un carré de côté [AB].

b. Carré : construction à partir d'un côté et du cercle circonscrit

Placer deux points A et B et dessiner le segment [AB],
tracer la médiatrice de [AB] et le cercle de diamètre [AB].

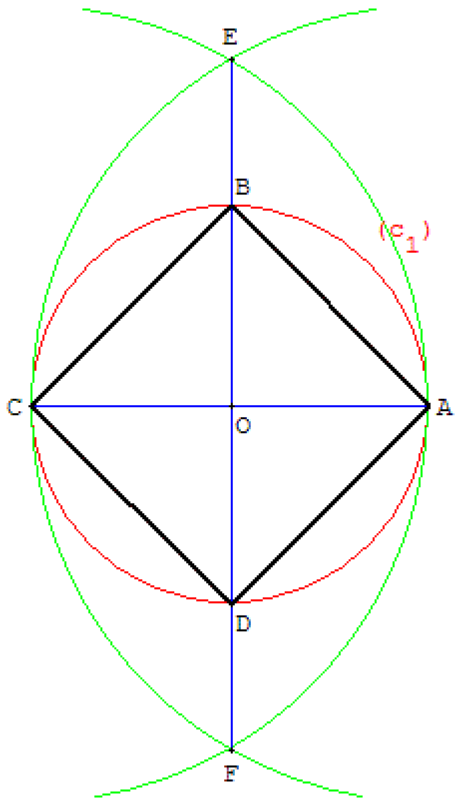


Remarque : avec la règle et le compas, tracer le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. la droite joignant les points d'intersection des deux cercles est la médiatrice.

Le centre O du carré est un des points d'intersection de la médiatrice et du cercle de diamètre [AB].

Le cercle (*c*) de centre O passant par A est le cercle circonscrit au carré.

Le sommet C est le deuxième point d'intersection de la droite (AO) et du cercle circonscrit (*c*).



De même D est l'intersection de (BO) et du cercle (*c*).

ABCD est un carré de côté [AB] inscrit dans le cercle (*c*).

c. Carré : construction à partir d'une diagonale [AC]

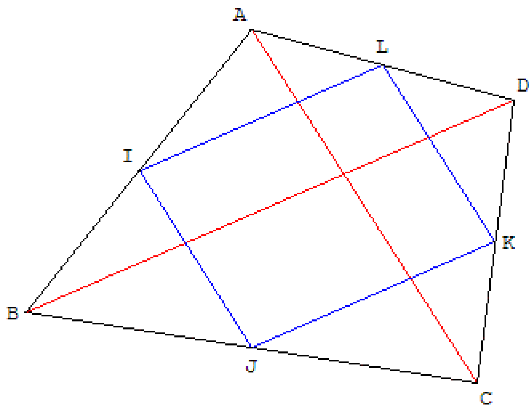
Tracer deux points libres A et C, le segment [AC] et son milieu O.
La médiatrice (*d*) de [AC] coupe le cercle (*c*) de diamètre [AC] en B et D.
Tracer le losange ABCD et montrer que ABCD est un carré.

En classe de quatrième, on calculera la longueur du côté du carré avec la relation de Pythagore dans le triangle OAB :

AB = $r\sqrt{2}$, où r = OA est le rayon du cercle circonscrit.

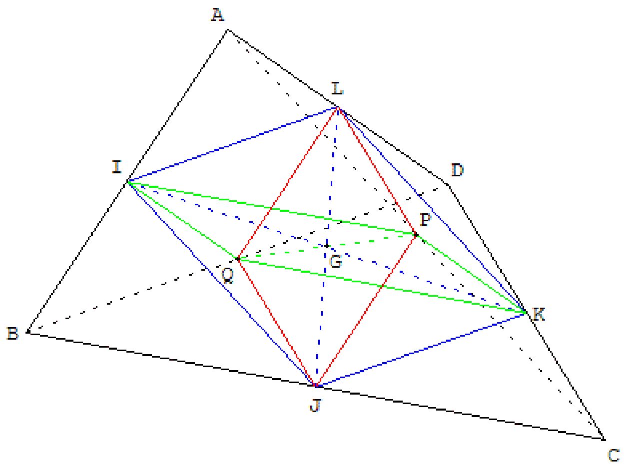
2. Théorème de Varignon

Un quadrilatère étant donné, si l'on joint les milieux des côtés consécutifs, on obtient un parallélogramme.



Ce résultat est valable quel que soit le quadrilatère convexe, concave ou croisé.
Il peut être démontré dès la classe de quatrième grâce au théorème des milieux des côtés d'un triangle.

En corollaire les médianes d'un quadrilatère ont même milieu (étant les diagonales du parallélogramme),
le périmètre du parallélogramme de Varignon est égal à la somme des longueurs des diagonales du quadrilatère,
l'aire du quadrilatère, non croisé, est le double de celle du parallélogramme de Varignon.



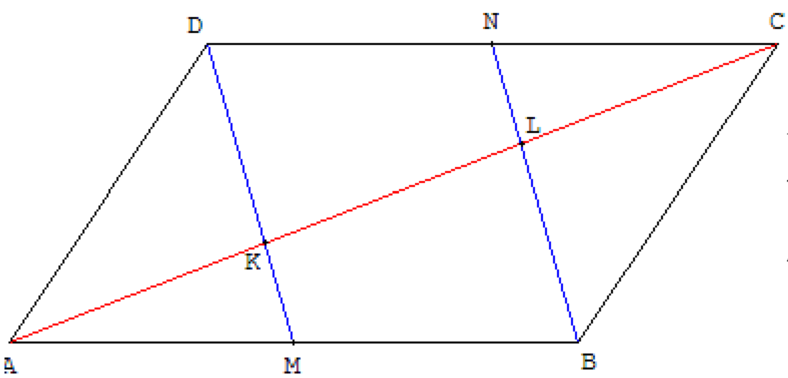
Pour un quadrilatère, les milieux et des côtés, les milieux des deux côtés opposés et des diagonales forment des parallélogrammes.

Ces trois parallélogrammes ont même milieu : le centre de gravité G du quadrilatère.

Les droites qui joignent les milieux des côtés et les milieux des diagonales se coupent en G qui est leur milieu.

Pierre Varignon (1654-1722), ami de Jean Bernouilli est surtout connu pour avoir assis en France les idées de Leibniz sur l'analyse (reprises par De L'Hospital) face à l'opposition de Rolle et aux travaux de Newton.

3. Parallélogramme et milieux



Les éléments d'Euclide, livre III

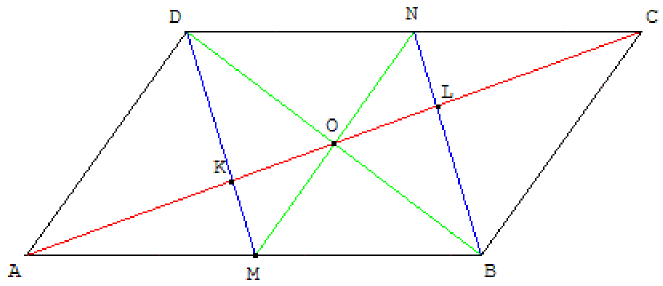
Dans un parallélogramme, les segments, joignant deux sommets opposés aux milieux des côtés opposés, sont parallèles et partagent la diagonale joignant les deux autres sommets en trois parties égales.

Solution 1

Soit ABCD est un parallélogramme de milieu O, M est le milieu de [AB] et N le milieu de [CD].

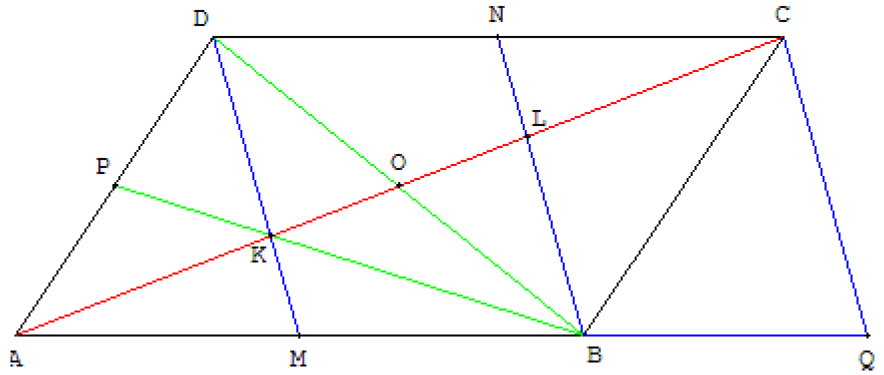
O est le milieu commun de la diagonale [BD] et de la médiane [MN].
MBND est un parallélogramme et (MD) est parallèle à (BN).

O est le milieu commun de [BD] et de [MN].
MBND est un parallélogramme et
(MD) est parallèle à (BN).



M est le milieu de [AB] donc, dans le triangle ABL, le point K est le milieu de [AL] et AK = KL,
N est le milieu de [CD] donc, dans le triangle CDK, le point L est le milieu de [KC] et KL = LC.
K et L partagent [AC] en trois segments de longueur égale.

Solution 2



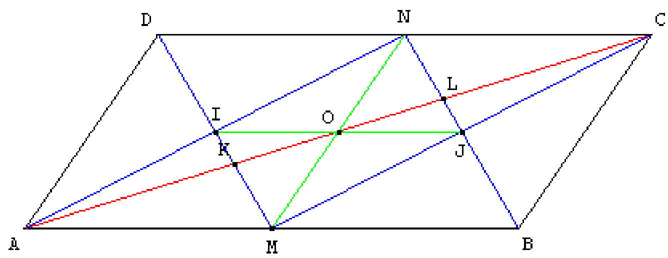
Soit M le milieu de [AB], N le milieu de [AB] et P le milieu de [AD],
O, point d'intersection de (AC) et (BD), milieu de [AC] est le milieu de [BD].
Les droites (AO), (BP), et (DM), médianes du triangle ABD, sont concourantes en K, centre de gravité du triangle.

Soit Q le symétrique de M par rapport à B.
On a AM = MB = BQ et (DM) // (NB) // (CQ) car MBND et BQCN sont des parallélogrammes.
Le théorème de Thalès par rapport à ces trois parallèles et aux deux sécantes (AQ) et (AC) permet de conclure :
AK = KL = LC.

Applications

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers des médianes à partir des sommets :
À partir d'un triangle ABD, construire le point C, symétrique de A par rapport au milieu O de [BC], permet d'obtenir le parallélogramme de la figure ci-dessus. [AO] et [CM] sont deux médianes de ABD qui se coupent en K, centre de gravité du triangle.

AK = $\frac{1}{3}$ AC = $\frac{2}{3}$ AO car AO = $\frac{1}{2}$ AC AK = AC = AO car AO = AC. Le point K situé au tiers de [AD] est aux deux tiers de la médiane [AO].



Division d'un segment en trois parties égales (sans utiliser la propriété de Thalès).
Pliage d'une feuille en trois parties égales : constructions - pliages en troisième.
Dans un rectangle ABCD, (MD) et (BN) sont

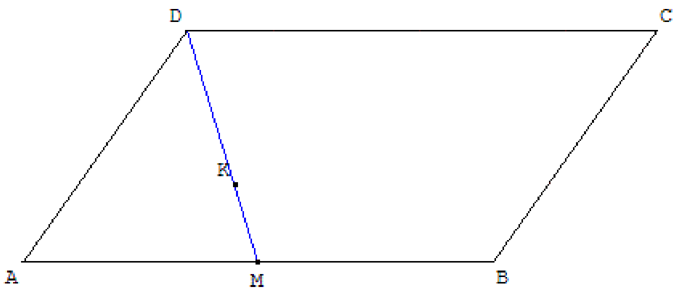
perpendiculaires à (AC) si AB = $\sqrt{2}$ CD.

Cas particulier

Si le parallélogramme ABCD est tel que
AB = 2 AD, en remarquant que BCNM est alors un losange, montrer que :
(BN) est perpendiculaire à (MC),
IMJN est un rectangle.

I et J sont les milieux des parallélogrammes AMND et MBCN. La droite (IJ) est parallèle à (AB) et à (CD) ; [IJ] et [AC] ont même milieu O.

Figure incomplète



Soit ABCD est un parallélogramme, M est le milieu de [AB] et K situé au tiers de [MD].
Que penser du point K ? Quel segment tracer pour trouver une solution ?

Indications

Point de vue des configurations : tracer les diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en O.
K est le centre de gravité du triangle ABD, situé au deux tiers de la médiane [AO], donc au tiers de [AC].

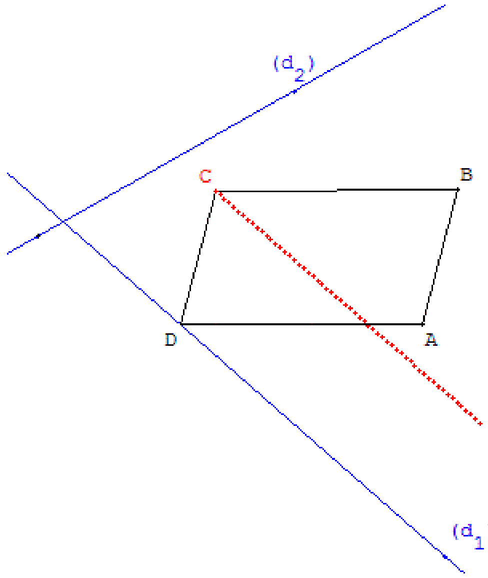
Point de vue vectoriel : tracer la diagonale [AC].

Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

4. Parallélogramme avec contraintes

Construire un parallélogramme dont deux sommets sont situés sur deux droites

On donne deux points À, B distincts et deux droites (d_1), (d_2) sécantes, et distinctes de (AB).
Existe-t-il un point C sur (d_2) et un point D sur (d_1) tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme ?

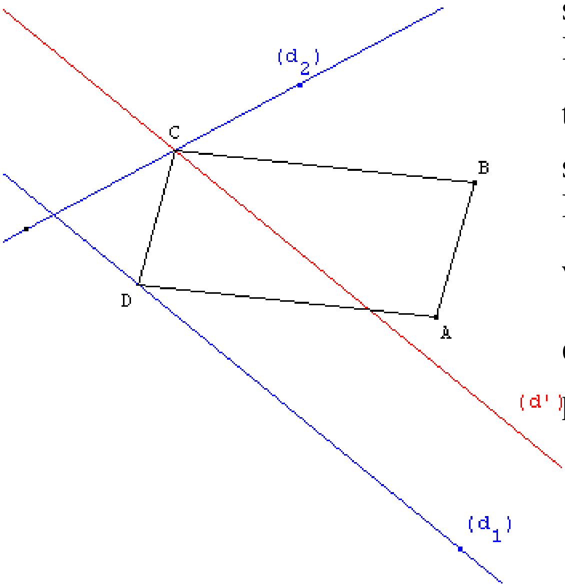


Analyse

Placer un point D variable sur (d_1) et construire le quatrième point C du parallélogramme ABCD.
Déplacer le point D, jusqu'à ce que C soit sur la droite (d_2).

Solution

La trace du lieu du point C permet de réaliser que ce point est situé sur une droite parallèle à (d_1).

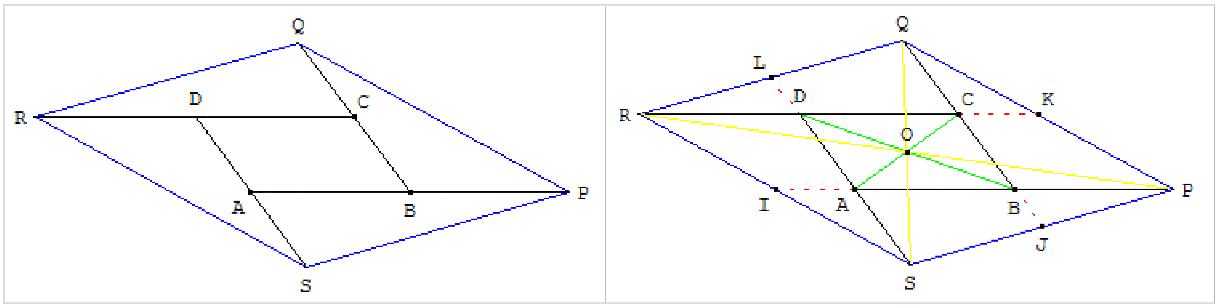


Il suffit donc de tracer la droite (d') image de (d_1) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les droites (d_2) et (d') sont sécantes en C.
Le point D, image de C par la translation réciproque de vecteur $\overrightarrow{BA}$, est situé sur (d_1)
et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$: le parallélogramme ABCD est la solution du problème.

5. Multiplication de l'aire d'un parallélogramme

Classe de troisième

ABCD est un parallélogramme, P est le symétrique de A par rapport à B, Q est le symétrique de B par rapport à C, R est le symétrique de C par rapport à D et S est le symétrique de D par rapport à A. Montrer que PQRS est un parallélogramme d'aire cinq fois plus grande.



Ces deux parallélogrammes ont même milieu O.

Démonstration 1 : utilisation de parallélogrammes.

En raison de la symétrie de centre B, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$, et pour celle de centre D, $\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{DC}$.

Par ailleurs, ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ces trois égalités permettent d'écrire : $\overrightarrow{AP} = 2\,\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{RC}$, APCR est un parallélogramme : les diagonales [AC] et [RP] se coupent en leur milieu : O est le milieu de [RP].
De même, on montre que dans le parallélogramme BQDS, O est le milieu de [QS].

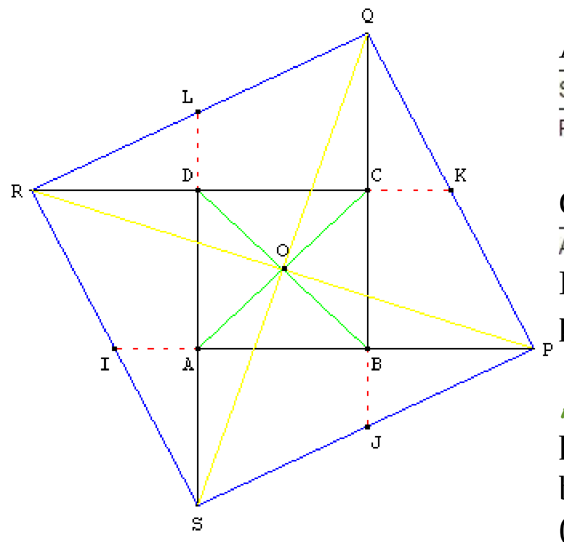
Réciproquement les diagonales du quadrilatère PQRS se coupent en leur milieu O, c'est un parallélogramme.

Démonstration 2 : symétrie de centre O.

Dans la symétrie de centre B, B est point fixe et P a pour image A.
Dans la symétrie de centre O, B et A ont pour images D et C .
Dans la symétrie de centre D, D est invariant et C a pour image R.

En composant ces trois symétries, nous obtenons une symétrie centrale qui transforme B en D : c'est la symétrie de centre O, dans cette symétrie P a pour image R.
De même en composant les symétries de centres A, O et C on montre que cette composée est la symétrie de centre O qui transforme S en Q. O est le centre de symétrie du quadrilatère PQRS : c'est un parallélogramme.

Démonstration 3 : égalité de vecteurs



Avec une relation de Chasles calculer les vecteurs $\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{RQ}$:
$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CQ} = 2\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$.

Comme ABCD est un parallélogramme on a :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont égaux : PQRS est un parallélogramme.

Aire : les triangles CQR, DRS, ASP et BPQ ont même hauteur que le parallélogramme ABCD relativement à des bases deux fois plus grandes, ils ont même aire que ABCD (ou bien remarquer que, l'aire de CQR est la moitié de l'aire du parallélogramme CQC'R, où C' est le symétrique de C par rapport à L. Le parallélogramme CQC'R a une aire double de celle de ABCD).
L'aire de PQRS égale à l'aire de ABCD, augmentée des aires des quatre triangles est égale à cinq fois l'aire du petit parallélogramme.

Réciproquement on peu retrouver le petit parallélogramme à partir du grand parallélogramme en joignant les milieux des côtés aux sommets suivants (dans le sens direct).

Carré

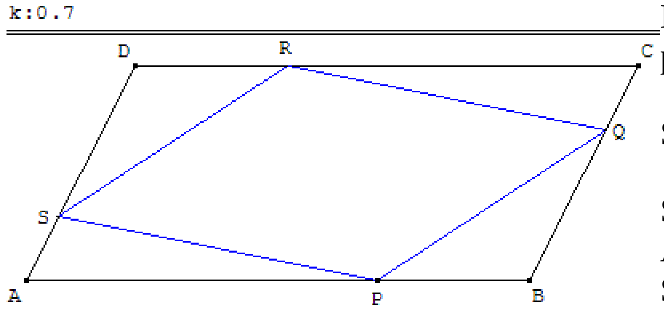
ABCD est un carré, P est le symétrique de A par rapport à B, Q est le symétrique de B par rapport à C, R est le symétrique de C par rapport à D et S est le symétrique de D par rapport à A. Montrer que PQRS est un carré d'aire cinq fois plus grande.

La rotation de centre O et d'angle 90° transforme [AP] en [BQ], [BQ] en (CR), ...

P a pour image Q, Q a pour image R, R a pour S et S a pour image P. le quadrilatère PQRS globalement invariant par la rotation a ses quatre côtés de même longueur, deux côtés consécutifs forment un angle de 90° égal à l'angle de la rotation. ADCD est un carré.

Si le côté du petit carré AB = a, la propriété de Pythagore dans le triangle BPQ permet de calculer PQ = $a\sqrt{5}$. PQRS a une aire égale à $5a^2$.

Prolongements



Les symétries centrales sont, lorsque $k = 2$, un cas particulier de l'exercice plus général suivant :

Soit ABCD un parallélogramme et k un réel positif.

Sur la demi-droite [BA) on place le point P tel que AP = k BA.
Sur la demi-droite [CB) on place le point Q tel que BQ = k CB.
Sur la demi-droite [DC) on place le point R tel que CR = k DC.
Sur la demi-droite [AD) on place le point S tel que DS = k AD.

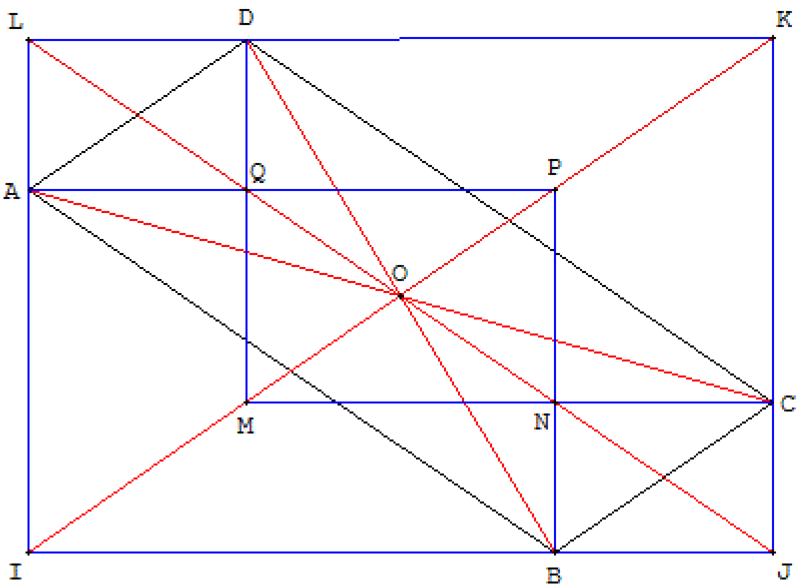
Montrer que PQRS est un parallélogramme.

Voir : le quadrilatère qui tourne dans maxi_mini.doc

A la place du parallélogramme, il possible d'envisager n'importe quel polygone régulier convexe.

Voir aussi l'étude avec des triangles, dans la page triangle en seconde.

6. Bissectrices d'un parallélogramme



Les bissectrices intérieures et extérieures d'un parallélogramme forment deux rectangles.

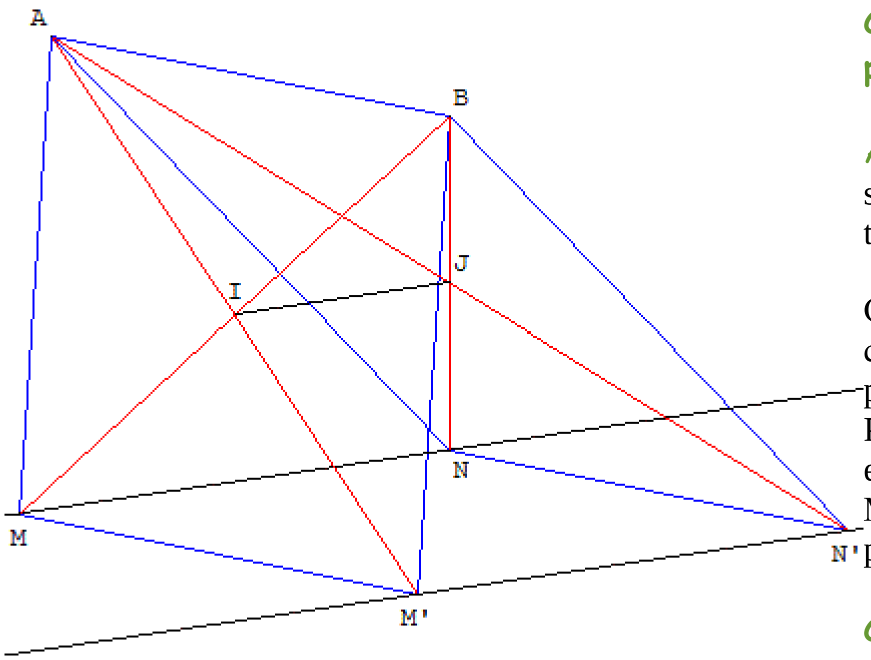
Les diagonales du parallélogramme et des rectangles se coupent en O, centre de symétrie de la figure.

7. Translation

Définition : dire que le point M’ est l'image du point M par la translation qui transforme A en B signifie que le quadrilatère ABM’M est un parallélogramme.

Les segments [AM’] et [BM] ont même milieu.

Si M est sur la droite (AB), ABM’M est un parallélogramme aplati.



Construire l'image d'un segment par une translation

Application : construire l'image d'un segment [MN] par la translation qui transforme A en B.

On construit les points M’ et N’ tels que ABM’M et ABN’N soient des parallélogrammes.
Pour cela tracer les milieux I de [BM] et J de [BN].
M’ et N’ sont les symétriques de A par rapport à I et J.

Construire l'image d'une droite, par une translation

Placer deux points M et N sur une droite (*d*). Construire les points M’ et N’, images des points M et N par la translation qui transforme A en B.

La droite (M’N’) est l'image de (*d*) par la translation.

Ces deux droites sont parallèles.

Indication

Soit I le centre du parallélogramme ABM’M et J le centre du parallélogramme ABN’N.

(IJ), droite des milieux de AM’N’, est parallèle à (M’N’).
(IJ), droite des milieux de BMN, est parallèle à (MN).

Les droites (MN) et (M’N’) parallèles à (IJ) sont parallèles entre elles.