Plan complexe avec GéoPlan

Des carrés autour d'une figure - études de configurations avec les complexes.

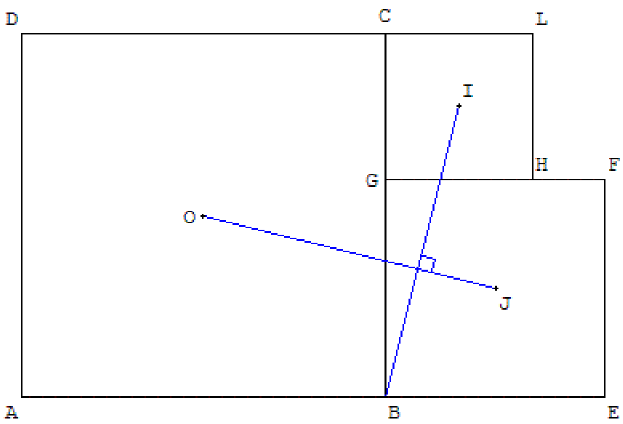
Sommaire

Faire des maths… avec GéoPlan : http://debart.pagesperso-orange.fr

Ce document PDF : http://www.debart.fr/pdf/plan_complexe.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/ts/plan_complexe.html

Document n° 110, transférée le 20/5/2007

1. Trois carrés



Soit ABCD un carré et G un point de [BC] ; on construit deux carrés extérieurs à ABCD de côtés [BG] et [GC]. On note O, J, I les centres des trois carrés. Montrer que (BI) et (OJ) sont orthogonales et que BI = OJ.

Par dualité (CJ) et (OI) sont orthogonales et CJ = OI.

Solution

On place l'origine en G et l'axe G*x* selon (GF).

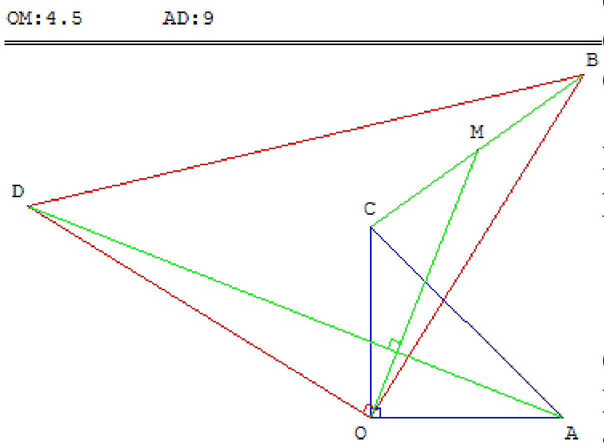
Les affixes des points sont : G(0), F(a), H(b), C(ib), B(-ia).

On en déduit les affixes des centres, milieux de [CH] et [BF] :
I({(1+i)/2}b), J({(1-i)/2}a).

Comme la longueur des côtés de ABCD est a+b, on a : O(-{a+b}/2 + i{b-a}/2),
d'où par soustraction l'affixe du vecteur BI est (b/2 + i{a+b/2}) et $\overrightarrow{OJ}$(a+b/2 - ib/2).

On remarque alors que b/2 + i{a+b/2}= i (a+b/2 - ib/2), d'où l'orthogonalité des vecteurs et l'égalité des longueurs BI et OJ.

- 2. Deux triangles rectangles isocèles - Médiane de l'un, hauteur de l'autre



Construction de deux triangles rectangles isocèles directs OAC et OBD autour d'un point O.
On note M est le milieu de [BC]

Monter que les segments [AD] et [OM] sont perpendiculaires et que AD = 2 OM.

Solution

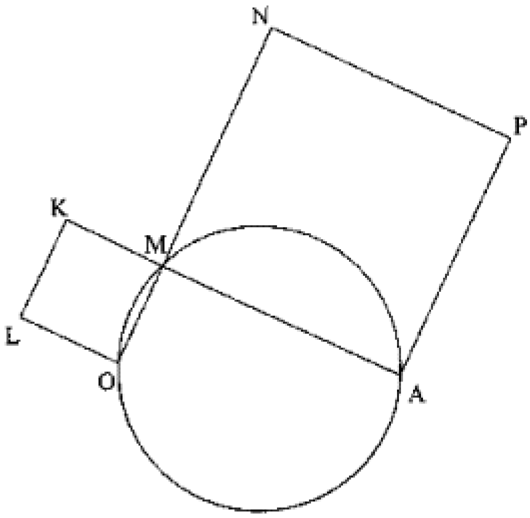
On place l'origine en O et l'axe O*x* selon (OA).
Les affixes sont A(*a*), B(*ia*), C(*z*), D(*iz*), où *a* est un réel strictement positif et *z* un complexe non nul.

M et $\overrightarrow{OM}$ ont pour affixe (*ia*+*z*)/2, l'affixe de $\overrightarrow{AD}$ est *iz* - *a* = 2*i* (*ia*+*z*)/2, d'où l'orthogonalité de (OM) et (AD) ainsi que AD = 2 OM.

Autre exercice :
(AB) perpendiculaire à (CD) et AB = CD : *voir* les problèmes du BOA.

3. Deux carrés autour d'un triangle rectangle

Bac S national 2005 : *exercice pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.*



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle *C* de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle *C* et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note *k, l, m, n* et *p* les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

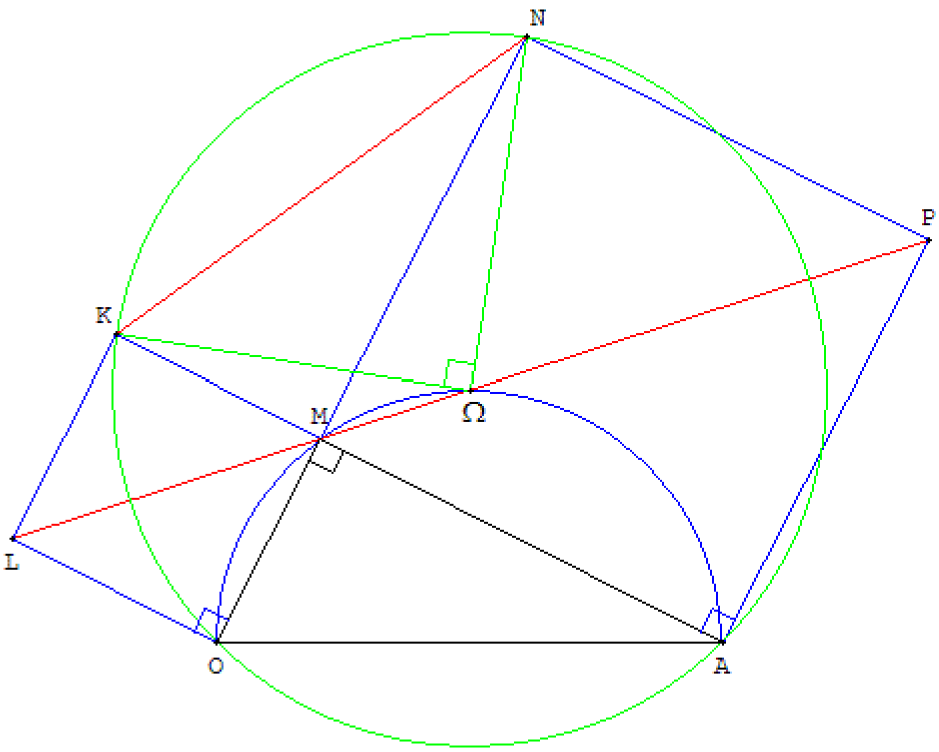
1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle *C*, on a $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

2) Établir les relations suivantes : $l = i\,m$ et $p = -im + 1 + i$.
On admettra que l'on a également $n = (1 - i)m + i$ et $k = (1 + i)m$.

3) a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle *C*.
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle *C* et préciser sa position sur ce cercle.

4) a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.



Indications

3) $\omega = \frac{1}{2}(p + l) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

4) KN = $|n-k| = |(1 - i)\, m + i - (1 + i)\, m| = |i - 2i\, m| = |-2i| \left|m - \frac{1}{2}\right| = 1$ = OA.

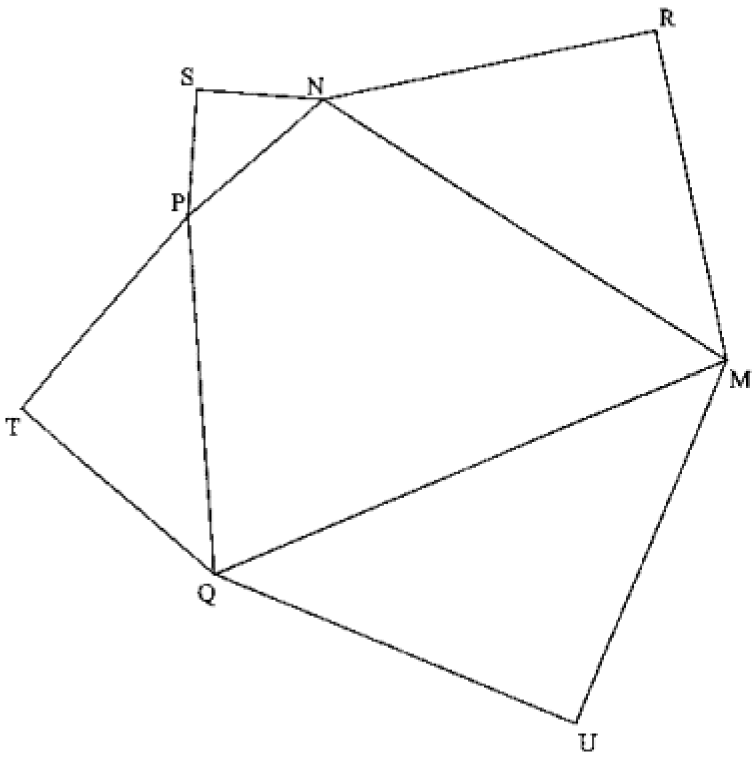
$k - \omega = i\,(n - \omega)$. D'où K est l'image de N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, sens direct. Le triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω.

5) KN = 1 et comme ΩNK est rectangle isocèle, $\Omega N^2 + \Omega N^2 = 2\,\Omega N^2 = KN^2 = 1$. N appartiens au cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Voir : BOA triangle rectangle - Homothéties
Figure de Renan : démonstration du théorème de Pythagore par la méthode des aires.

4. Quatre triangles autour d'un quadrilatère - configuration de Von Aubel

Bac S national 2005 : *exercice pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.*



Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure ci-dessus. Cette figure complétée sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par m, *n*, *p* et *q*, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1) Soit *f* la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude *f*.
- On désigne par *r* l'affixe du point R. Démontrer que : $r = \frac{1+i}{2}\, m + \frac{1-i}{2}\, n$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

On admettra que l'on a également les résultats $s = \frac{1+i}{2} n + \frac{1-i}{2} p$, $t = \frac{1+i}{2} p + \frac{1-i}{2} q$ et

$u = \frac{1+i}{2} q + \frac{1-i}{2} m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2) Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3) a) Démontrer l'égalité $u - s = i\,(t - r)$.

b) Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

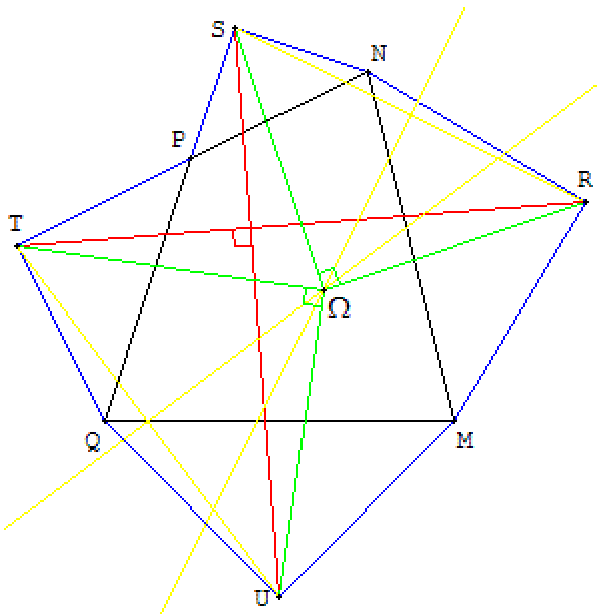
Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1) Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la partie A, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2) Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure.

Indications

1) La similitude f est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



Elle est de la forme $z' = az + b$, avec $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

3) RT = SU et les droites (RT) et (SU) sont perpendiculaires.

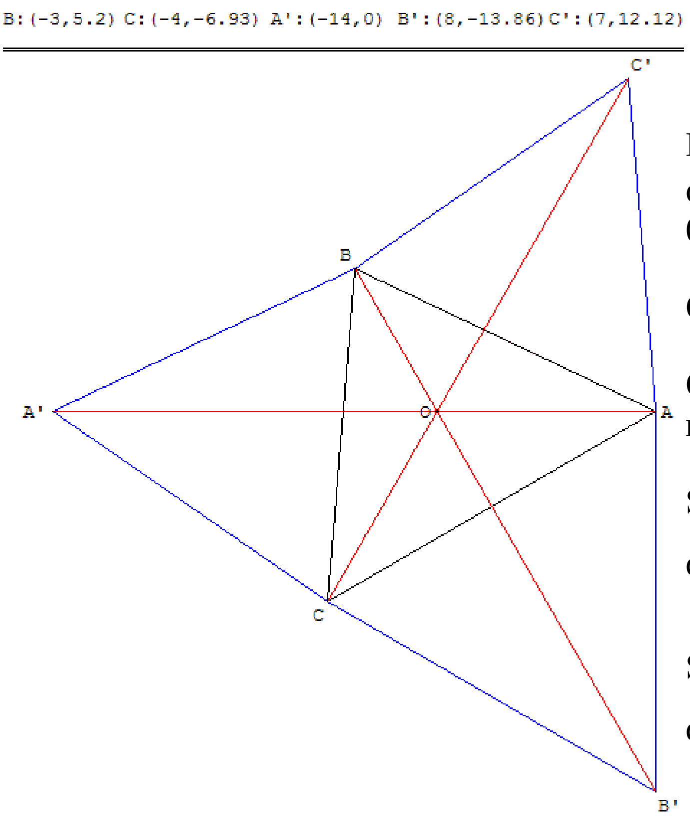
B) La rotation $g(\Omega, \frac{\pi}{2})$ transforme R en S et T en U.

ΩR = ΩS donc Ω est sur la médiatrice de [RS], Ω est aussi sur la médiatrice de [TU] ; ces deux médiatrices sont sécantes en Ω.

Démonstration avec la rotation, *voir* : théorème de Von Aubel

Cas particulier lorsque les diagonales de MNPQ sont égales et perpendiculaires, *voir* : similitude.

5. Triangles de Napoléon



Bac S Liban 2005 : *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, Unité graphique : 0,5cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\,2\pi/3}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

2. On appelle *a', b'* et *c'* les affixes respectives des points A', B' et C'.

- Calculer *a'* . On vérifiera que *a'* est un nombre réel.
- Montrer que $b' = 16e^{-i\pi/3}$.

En déduire que O est un point de la droite (BB').

- On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

- Calculer la distance OA + OB + OC.
- Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
- On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :
$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + c\,j| = 22$.

- On admet que, quelques soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$

Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

Indications

2. $a' = -14$; la droite (AA') est l'axe (Ox) et contient le point O.

$b'/b = -8/3$ est réel négatif $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \arg(-8/3) = \pi\ [2\pi]$: le point O appartient à la droite (BB').

$c'/c = -7/4$ le point O appartient à la droite (CC').

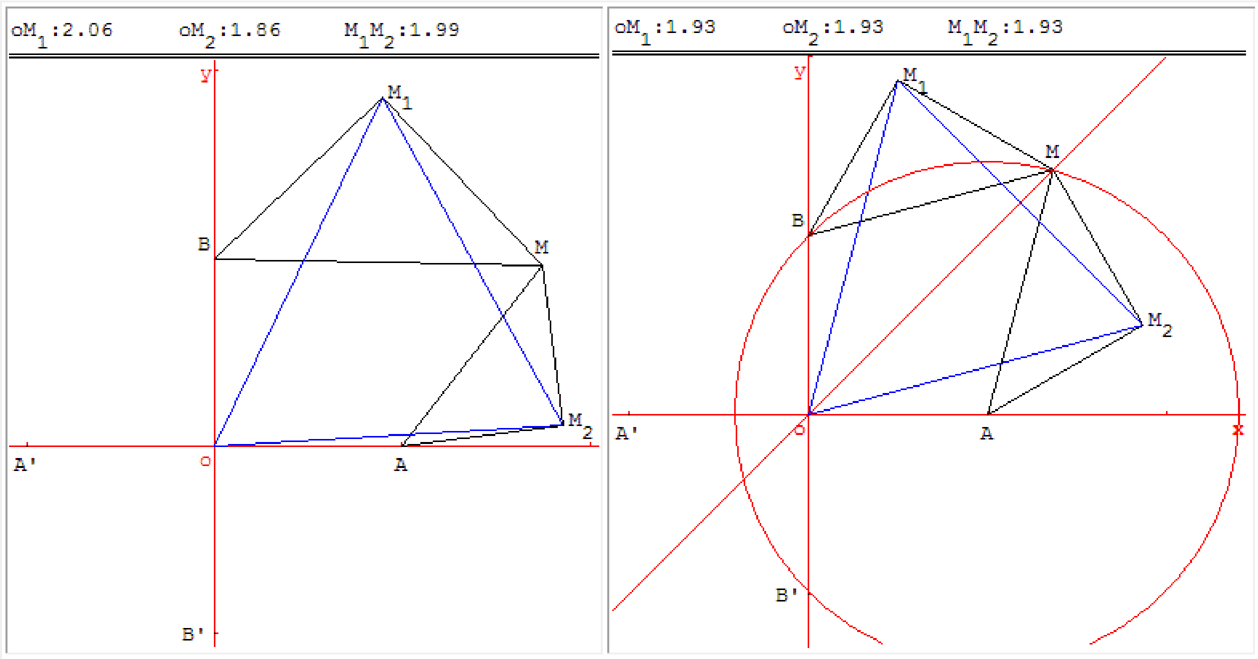
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O. O est le point de Torricelli de ABC (dit aussi point de Fermat).

3. OA + OB + OC = 22.
MA + MB + MC = $|a - z| + |b - z| + |c - z|$
MA + MB + MC = $|a - z| + |(b - z)j^2| + |(c - z)j|$
d'où MA + MB + MC $\geq |(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j|$
soit MA + MB + MC ≥ 22
d'où MA + MB + MC $\geq$ OA + OB + OC.

Le point O réalise le minimum de la somme MA + MB + MC lorsque M décrit le plan (Théorème de Torricelli ou de Schruttka).

6. Recherche de triangles équilatéraux

Bac S centres étrangers 1999 : *exercice 2 pour les candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire*



Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), A, A′, B, B′ sont les points d'affixes respectives 1, – 1, *i*, – *i*.

À tout point M d'affixe *z*, distinct des points O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles avec

$$\left(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. *a)* Justifier les égalités $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$. (0,5 *point*)

b) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$. (0,5 *point*)

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a) Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$. (1 *point*)

En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure. (0,5 *point*)

b) Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut à $|z+1|^2 = 2|z|^2$. (0,5 *point*)

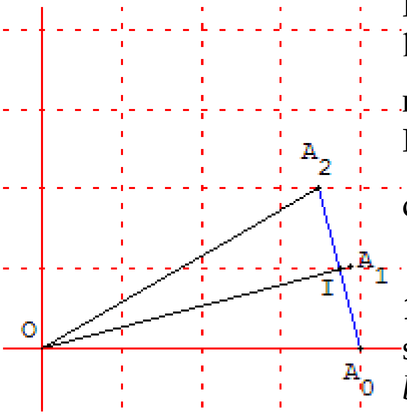
c) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$. (0,5 *point*)

On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$. Tracer (Γ) sur la figure. (0,5 *point*)

d) En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure. (0,75 *point*)

7. *Angle* $\frac{\pi}{12}$

Bac S Amérique du Nord 1999 - *EXERCICE 2 : candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire*



Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1, d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = e^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1. *a*) Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
b) Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l'affixe du point I.
c) Faire une figure.

2 . *a*) Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
b) Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.

c) Déterminer cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que :
$\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.