Les quadrilatères au collège avec GéoPlan

Quadrilatère orthodiagonal, cerf-volant, pseudo-carré, quadrilatère inscriptible, antiparallélogramme.

Sommaire

Quadrilatères au lycée

Faire des maths … avec GéoPlan: http://debart.pagesperso-orange.fr

Document Word : http://www.debart.fr/doc/quadrilatere_college.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf/quadrilatere_college.pdf
Document HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/college/quadrilatere_college.html

Document n° 114, réalisé le 28/11/2007, mis à jour le 5/4/2008

en : quadrilateral
de : Viereck

Quadrilatères remarquables

1. Définitions

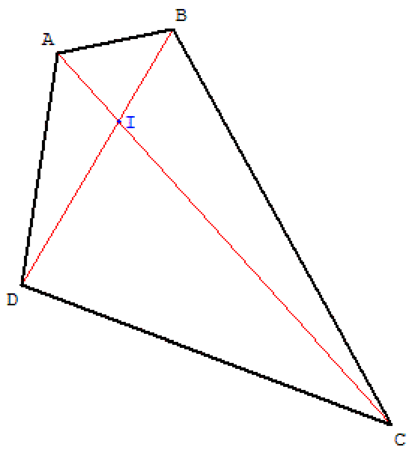
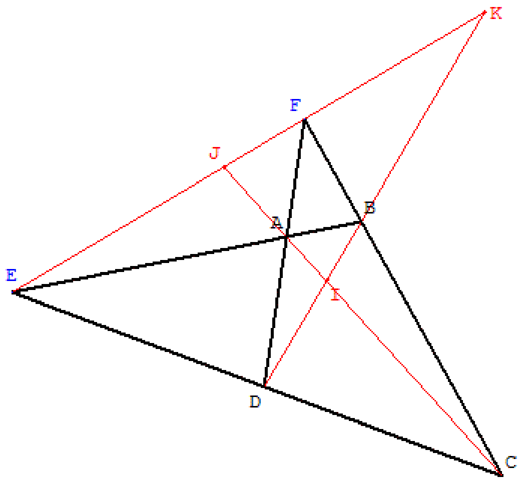
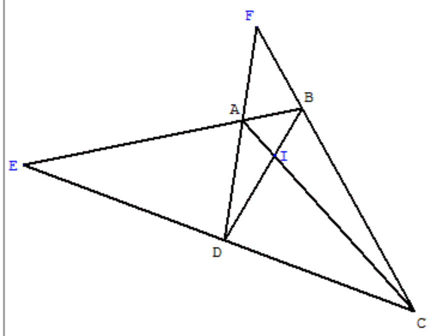
Convexe

Polygone convexe : polygone plan dont les sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quel côté du polygone.
Polygone concave : polygone qui n'est pas convexe, on dit aussi *non convexe*.

Quadrilatère convexe, concave, croisé

Un quadrilatère ABCD est un polygone qui a quatre côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Les quatre points A, B, C, D, situés dans un même plan, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés, sont les sommets du quadrilatère.
Les points A et C d'une part ; B et D d'autre part, sont des sommets opposés.
Les diagonales [AC] et [BD] sont les segments qui joignent deux sommets opposés.

Un quadrilatère est convexe, si les deux diagonales sont à l'intérieur du quadrilatère.
Un quadrilatère est concave, si (au moins) une des diagonales est à l'extérieur du quadrilatère.
Un quadrilatère est croisé, si les deux diagonales sont à l'extérieur du quadrilatère. Un quadrilatère croisé est concave.

Quadrilatère	Quadrilatère complet	Quadrangle
		
Le quadrilatère ABCD est un polygone convexe qui a : quatre sommets A, B, C et D ; quatre côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] ; deux diagonales (AC), (BD) ; le point d'intersection des diagonales I est le point diagonal.	Le quadrilatère complet formé avec les points A, B, C et D, a : quatre côtés, situés sur les droites (AB), (CD), (AD) et (BC) ; six sommets A, B, C, D, E et F ; trois diagonales (AC), (BD) et (EF) ; leurs points d'intersection I, J, K sont les trois points diagonaux.	Les quatre points A, B, C et D sont les sommets du quadrangle. Les six droites joignant les points deux à deux sont les côtés du quadrangle. Si le quadrangle est complet, les trois points diagonaux I, E et F sont les intersections des paires de côtés opposés.

Quadrilatère complet

Un quadrilatère complet est formé de quatre droites du plan se coupant deux à deux en six points (deux quelconques des quatre droites n'étant pas parallèles, trois quelconques n'étant pas concourantes).

Le quadrilatère complet a quatre côtés, six sommets, trois diagonales et trois points diagonaux.

Quadrangle

Un quadrangle est la figure formée par quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés : ce sont les sommets du quadrangle.
Les six droites joignant ces points deux à deux sont les côtés du quadrangle.
Deux côtés qui n'ont pas de sommet en commun sont dits opposés.
Deux côtés opposés (non parallèles) ont un point commun appelé point diagonal du quadrangle.
Un quadrangle complet a quatre sommets, six côtés et trois points diagonaux.

Quadrilatère gauche

C'est un quadrilatère dont les quatre sommets n'appartiennent pas au même plan.
Les côtés et les diagonales forment alors un Tétraèdre. L'étude du quadrilatère gauche en lui-même n'a pas de grand intérêt pédagogique. Nous nous limiterons ici, « *avec GéoPlan* », aux quadrilatères plans.

Cercle inscrit

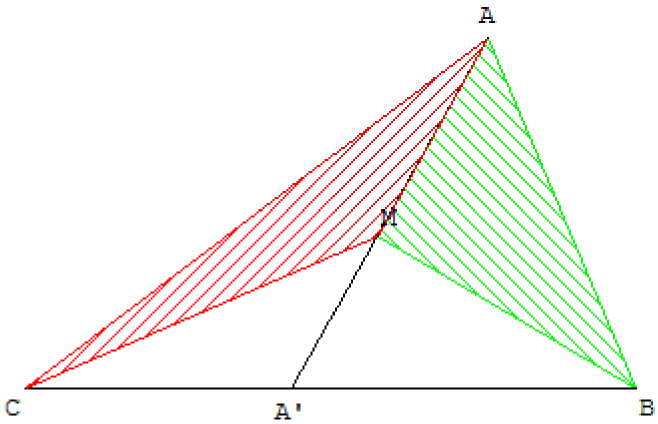
Pour qu'un quadrilatère convexe possède un cercle inscrit, il faut que ses bissectrices soient concourantes. Leur point d'intersection est alors le centre du cercle. Un point ce cercle se trouve en traçant la projection orthogonale de ce centre sur un des côtés du quadrilatère.
GéoPlan permet de tracer directement ce cercle avec l'instruction :
« *Créer>Ligne>Cercle>Cercle défini par centre et tangente* ».

Quadrilatères particuliers

On peut classer les quadrilatères suivant les longueurs des côtés ou des diagonales, le parallélisme des côtés ou leurs angles, l'orthogonalité des diagonales, les éléments de symétrie ou l'inscription d'un cercle.

En classe de cinquième se fait l'étude du parallélogramme, préparée en sixième par les cas particuliers losange, rectangle ou carré.
Dans cette page on trouvera l'étude de quadrilatères orthodiagonaux ou inscriptibles.

Quadrilatères quelconques



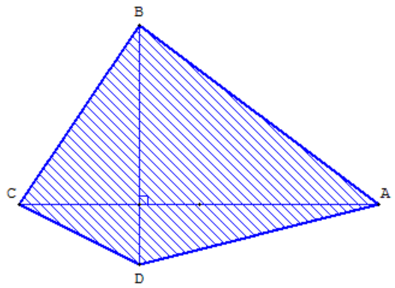
Chevron : ABMC est un exemple de quadrilatère non convexe : la diagonale [BC] est à l'extérieur du quadrilatère.

Théorème du chevron

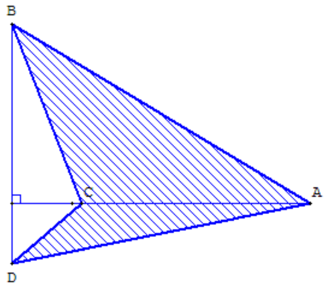
Si M est un point à l'intérieur d'un triangle ABC et A' le point d'intersection de (AM) et de (BC),
alors le rapport des aires des triangles ABM et ACM est égal au rapport $\frac{BA'}{A'C}$.

2. Quadrilatère orthodiagonal

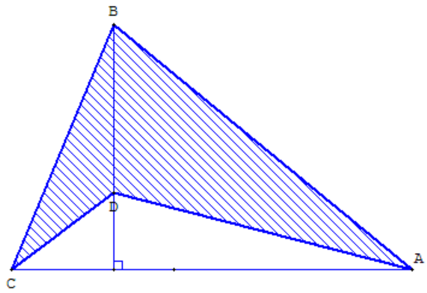
Quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires.



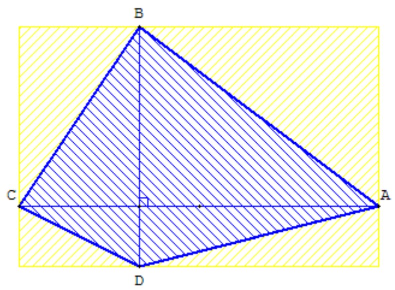
Quadrilatère orthodiagonal convexe



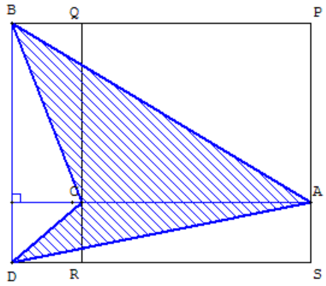
Chevron orthodiagonal non convexe



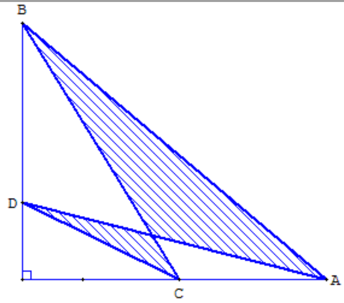
Autre chevron



Quadrilatère orthodiagonal inscrit dans un rectangle.



Chevron inscrit dans un rectangle.



Quadrilatère orthodiagonal croisé.

Aire du quadrilatère orthodiagonal non croisé

Le quadrilatère orthodiagonal convexe ABCD de la figure de gauche est inscrit dans un rectangle. L'aire du rectangle est égale au produit des longueurs des diagonales AC × BD.

L'aire du quadrilatère orthodiagonal est alors $\frac{1}{2}$AC × BD.

(*Conforme au cas général* étudié au lycée : l'aire d'un quadrilatère convexe est égale au demi-produit des diagonales multiplié par le sinus de l'angle qu'elles forment – Le sinus d'un angle droit vaut 1.)

Ce résultat est encore valable pour les chevrons orthodiagonaux :
par exemple dans la figure du milieu l'aire du quadrilatère est égale à la somme des aires des triangles ABC et ABD. Leurs aires sont la moitié des aires des rectangles ACQP et ACRS, soit la moitié du rectangle PQRS.

L'aire du quadrilatère orthodiagonal ABCD, non croisé, est encore $\frac{1}{2}$AC × BD.

L'aire d'un quadrilatère orthodiagonal ABCD, non croisé, est égale à la moitié du produit des longueurs des diagonales : $\frac{1}{2}$AC × BD.

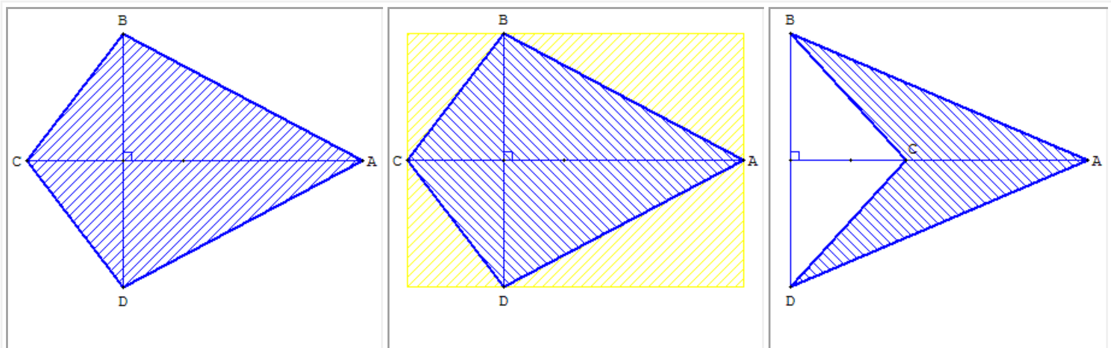
Ce calcul ne permet pas de trouver l'aire d'un quadrilatère orthodiagonal croisé – Le décomposer en deux triangles de part et d'autre du point d'intersection des diagonales.

3. Cerf-volant

Classe de sixième

En géométrie plane, le **cerf-volant** est un quadrilatère orthodiagonal symétrique par rapport à une de ses diagonales.
C'est un quadrilatère isocèle.

On le nomme aussi **rhomboïde** : quadrilatère en forme de losange.
Dérivé de *rhombe*, l'ancien nom français du losange, provenant du latin *rhombus*, mot conservé en anglais pour le losange.



Pointe de flèche.

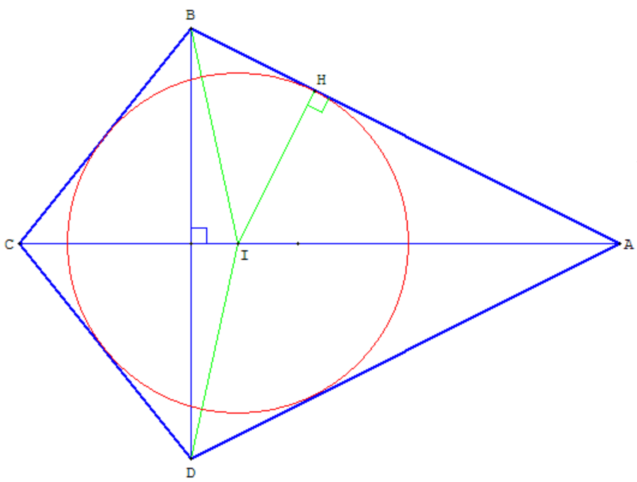
Le cerf-volant ABCD étant un quadrilatère orthodiagonal non croisé, son aire est égale à la moitié du produit des longueurs de ses diagonales : $\frac{1}{2}AC \times BD$.

La pointe de flèche, cerf-volant concave, ne doit pas être écartée de l'étude des quadrilatères en classe de sixième.

Cas particuliers : losange, carré.

Cercle inscrit

Classe de Troisième



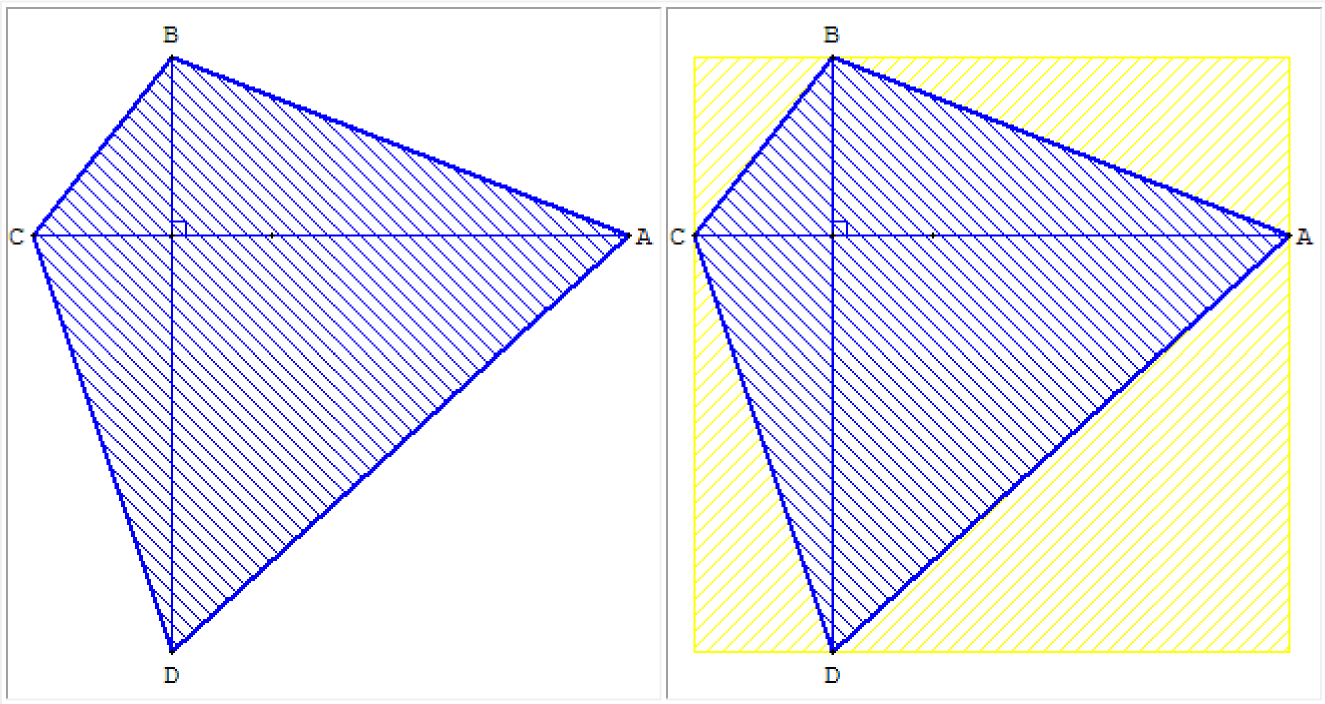
Soit ABCD un cerf-volant convexe, tracer le point I, intersection de la bissectrice de l'angle ABC – angle de côtés de longueurs différentes – avec l'axe de symétrie (AC) du cerf-volant.

I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, et en raison de la symétrie, ce cercle est inscrit dans le quadrilatère.

Le cercle inscrit est construit grâce au point H, projection orthogonale de son centre I sur le côté [AB].

4. Pseudo-carré

Quadrilatère orthodiagonal dont les deux diagonales sont de même longueur.



Le pseudo-carré convexe est inscrit dans un carré. L'aire du pseudo-carré ABCD est égale à la moitié de celle du carré dont le côté a la longueur d'une diagonale : $\frac{1}{2}AC^2$.

Cas particulier : carré.

5. Quadrilatère inscriptible - Points cocycliques

Classe de troisième

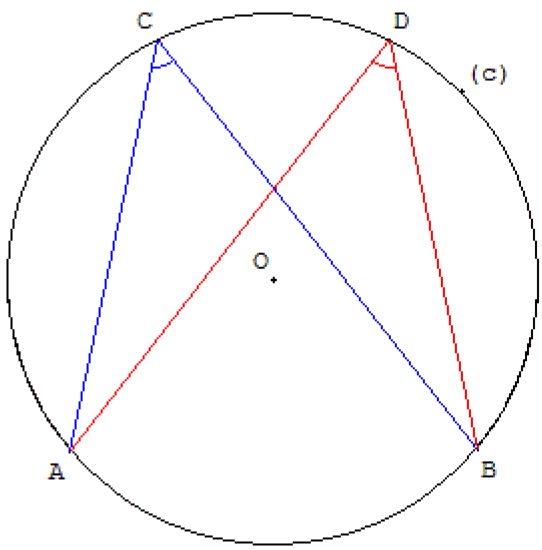
Définitions

Des points cocycliques sont situés sur un même cercle.
Un quadrilatère est inscriptible si les quatre sommets sont cocycliques.

Un quadrilatère est inscriptible si (et seulement si) deux angles opposés sont égaux ou supplémentaires.

a. Quadrilatère croisé

Rappel : un quadrilatère ACBD est croisé si les deux diagonales [AB] et [CD] sont à l'extérieur du quadrilatère. Un quadrilatère croisé est concave.



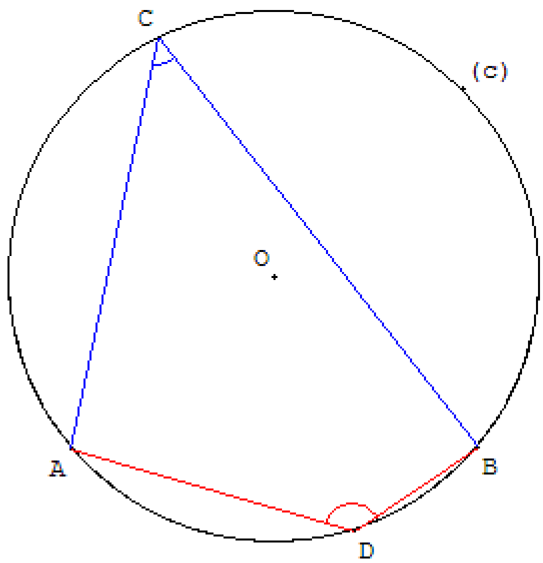
Un quadrilatère croisé est inscriptible si (et seulement si) deux angles opposés sont égaux.

ACB = ADB.

Les deux autres angles opposés sont aussi égaux.

b. Quadrilatère convexe

Rappel : un quadrilatère ACBD est convexe si les deux diagonales [AB] et [CD] sont à l'intérieur du quadrilatère.

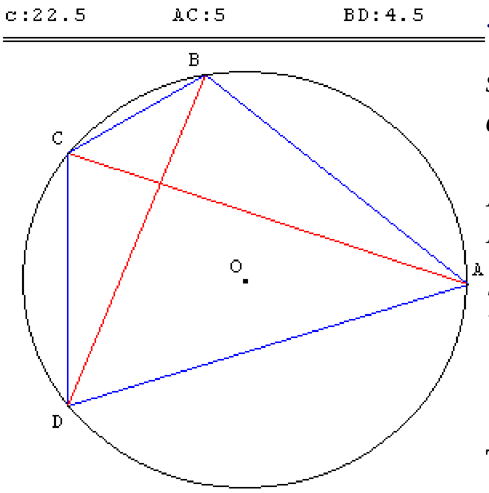


Un quadrilatère convexe est inscriptible si (et seulement si) deux angles opposés sont supplémentaires.

ACB + ADB = 180°.

Les deux autres angles opposés sont aussi supplémentaires.

6. Théorème de Ptolémée

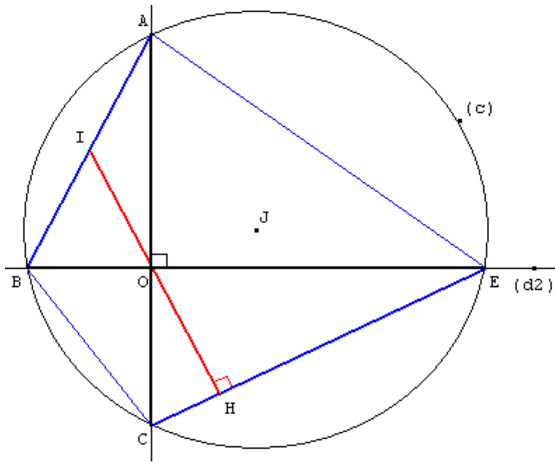


Théorème : *un quadrilatère convexe est inscriptible, si et seulement si la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales.*

Avec les notations de la figure ci-contre :
AB × CD + BC × DA = AC × BD.

7. Quadrilatère inscriptible orthodiagonal

Classe de seconde



Théorème de Brahmagupta (mathématicien indien du VII^{e} siècle) :

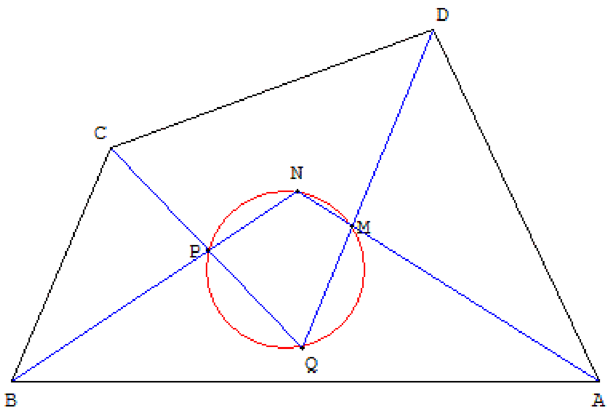
si les diagonales d'un quadrilatère inscriptible sont perpendiculaires l'une à l'autre et se coupent en un point O, une droite passant par O et perpendiculaire à l'un quelconque des côtés coupe le côté opposé en son milieu.

8. Bissectrices d'un quadrilatère

Les intersections des bissectrices intérieures d'un quadrilatère forment un quadrilatère inscriptible.

Démonstration

Classe de première S



Montrer que $s = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) + (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PN}) = \pi\ (2\pi)$.

Par angles égaux (éventuellement opposés par le sommet) on a :
$s = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) + (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PN}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB})$.

La somme des angles d'un triangle étant égale à π, dans les triangles MAD et PCB on a :
$s = \pi - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}) - (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DA}) + \pi - (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP})$,
$s = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DM}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})\ (2\pi)$.

Les bissectrices partagent en deux les angles du quadrilatère :

$s = \frac{1}{2}\ [(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})]$.

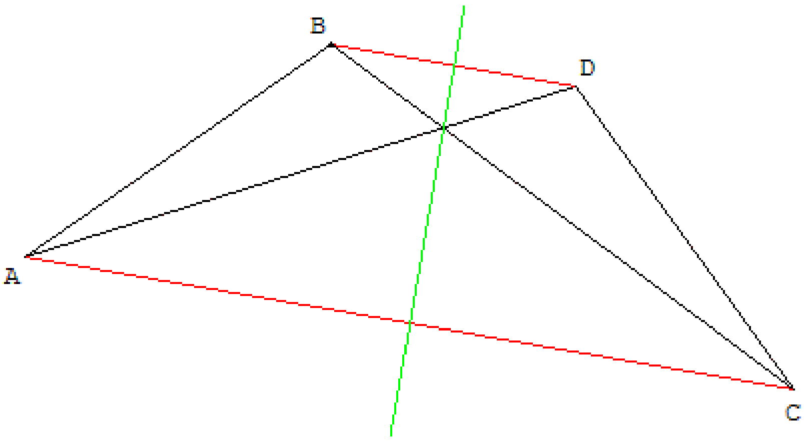
La somme des angles du quadrilatère est 2π :

$s = \frac{1}{2}\ [-2\pi] = \pi\ (2\pi)$.

Les angles $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$ et $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PN})$ sont supplémentaires. Le quadrilatère MNPQ est inscriptible.

9. Antiparallélogramme

Un antiparallélogramme est un quadrilatère croisé dont les côtés opposés sont la même longueur deux à deux.



Dans un antiparallélogramme les angles opposés ont la même mesure.

Les diagonales sont parallèles.

L'antiparallélogramme admet un axe de symétrie qui est la médiatrice des diagonales.

Deux côtés opposés ont leur point d'intersection situé sur cette médiatrice.

Le quadrilatère convexe formé par les deux côtés non croisés et les diagonales est un trapèze isocèle.

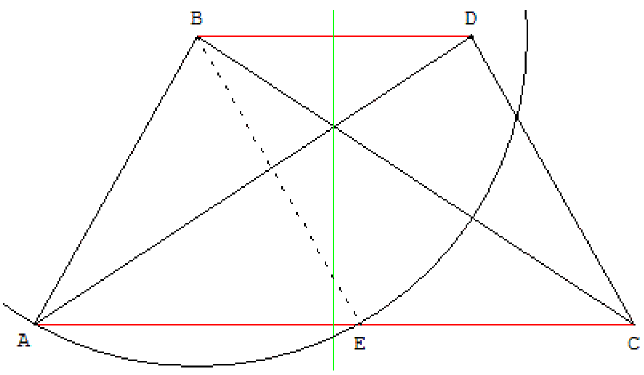


Figure articulée

AD = BC = a ; AB = CD = b ; $a > b$.

Si les sommets A, B, C et D sont articulés, la figure varie, mais le produit p = DB × CA reste constant. Cette constante p est égale à $a^2 - b^2$.

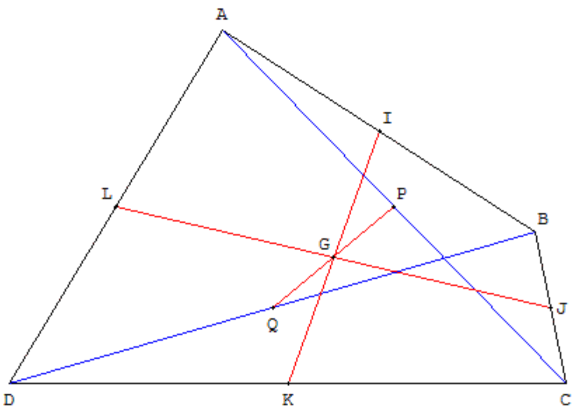
Démonstration : elle se fait en considérant la puissance du point C par rapport au cercle de centre B passant par A :

p = CE × CA = DB × CA ; les côtés [CE] et [DB] sont égaux car CEBD est un parallélogramme.

Quadrilatères au lycée

2.1. Centre de gravité d'un quadrilatère

Les trois droites qui joignent les milieux des côtés (médianes) et les milieux des diagonales se coupent en G, centre de gravité du quadrilatère, qui est leurs milieux.

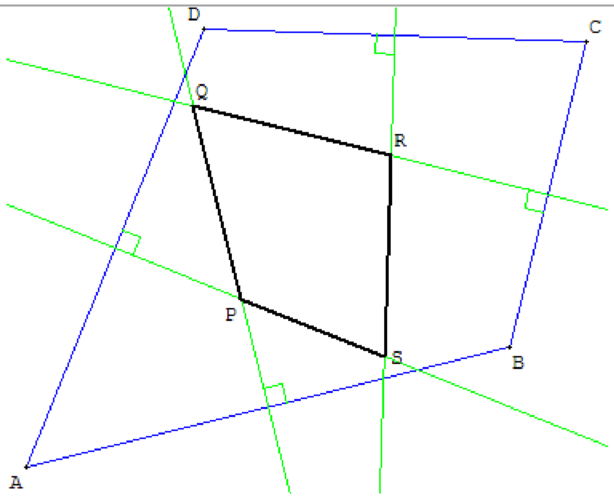


2.2 Médiatrices d'un quadrilatère

Les médiatrices d'un quadrilatère ABCD se coupent en P, Q, R et S.
Que dire de PQRS ?

Déplacer les points A, B, C ou D avec GéoPlan. Étudier les cas particuliers.

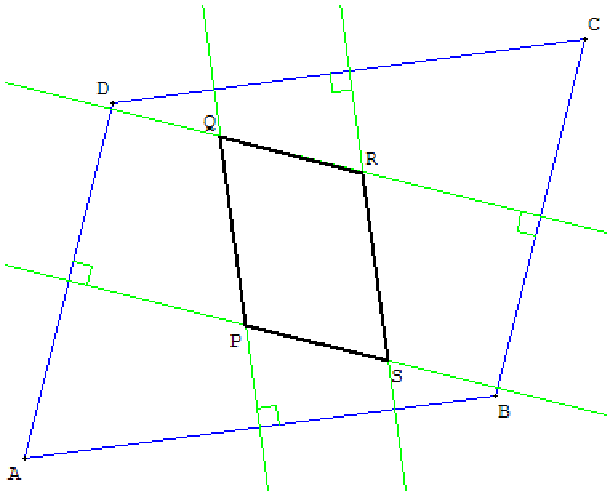
Le point P est confondu avec Q, qu'en est-il de R et S. Montrer que les points A, B, C, D sont alors cocycliques sur un cercle de centre P.



Les angles BAD et SPQ sont supplémentaires...

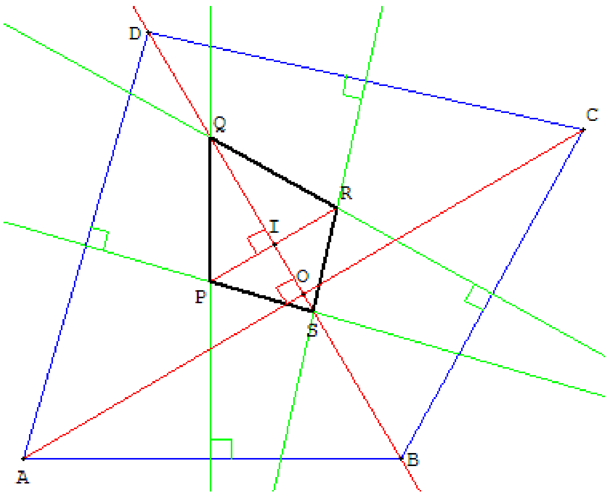
Commande GéoPlan : taper C pour le cercle circonscrit à BCD.

Médiatrices d'un parallélogramme



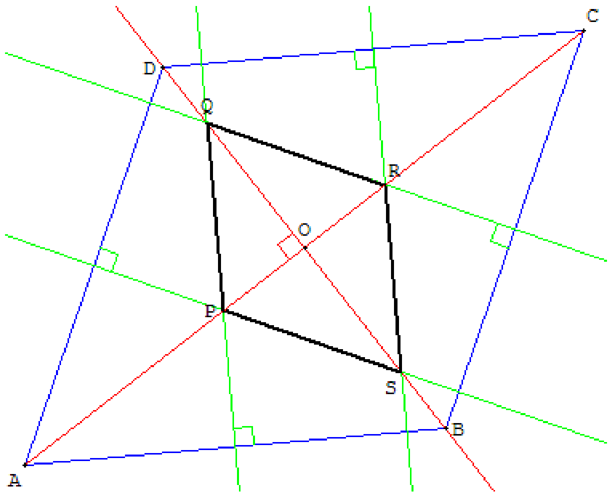
(PQ) et (RS) sont parallèles...

Médiatrices d'un cerf-volant



ABCD est un cerf-volant d'axe de symétrie (BD). Montrer que PQRS est aussi un cerf-volant d'axe de symétrie (BD).

Médiatrices d'un losange



PQRS est aussi un losange ayant les mêmes diagonales que ABCD.