Derive - Le calcul formel au Lycée

Faire des maths … avec Derive : calculs, fonctions, équations, intégrales, suites, graphe 3D.

Site Descartes et les Mathématiques : http://pagesperso-orange.fr/debart/
Page HTML : http://pagesperso-orange.fr/debart/derive/initiation.html

Page n° 81, réalisée le 7/4/2005

I Logiciel de calcul formel

Ce *logiciel outil* permet :

- des calculs exacts sur les nombres naturels, rationnels, réels ou complexes,
- des calculs sur les polynômes, factorisation, développement,
- des calculs sur les vecteurs et les matrices (peu utiles au lycée),
- des calculs sur les fonctions : limite, dérivation, intégration, résolution et représentation.

- Derive permet de tracer des graphes 2D ou des surfaces 3D.

- C'est aussi un outil pour la production de documents et la mise au point de problèmes.

Dans ce cas pour Derive version 5 vérifier l'installation de la police de caractères dfW5.

Pour le lycée le logiciel dérive, diffusé par Texas, est disponible sur PC et sur les TI-92, 89 ou voyage. Comme assistant calculatoire il devait, en classe, être à la disposition des élèves ou du professeur (rétroprojecteur).

II Présentation et premiers calculs

Derive est un logiciel merveilleusement puissant dans son aspect "calcul formel", très utile pour l'enseignant, ouvrant de nouvelles pistes pour l'enseignement mais présentant aussi des "pièges", posant des problèmes spécifiques, nécessitant une bonne connaissance du logiciel et une réflexion non négligeable sur quelques difficultés du calcul formel. (*Formateurs IUFM Strasbourg*)

Interface

Se familiariser avec l'écran : menu, barre d'outils commandes
Expression, écrire un calcul, résultats des calculs
barre d'état, édition des expressions.
caractères grecs et symboles mathématiques
fenêtre graphique

Nombres

π Taper pi, Ctrl+P ou utiliser le menu symboles.
Choisir le nombre de chiffres significatifs avec la commande Déclarer > Paramètres de Simplification :
PrecisionDigits := 80
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089

ê base des logarithmes naturels. Taper #e, Ctrl+E ou utiliser le menu symboles.
2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475
Toutes ces décimales sont exactes.

Décomposition d'un naturel en facteurs premiers : FACTOR(960, Trivial) $2^6\,3\cdot 5$

Calculs sur les fractions avec résultats simplifiés

Racines

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 0.7071067811

$\text{EXPAND}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \text{Rational}\right)$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}^3$ 2.828427124

$\text{EXPAND}(\sqrt{2}^3, \text{raDical})$ $2\cdot\sqrt{2}$

$$\text{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{SIN}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$ $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$

$\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 1}$ $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{2}$

Factoriser $\sqrt{6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{(a\cdot b)}$ n'est pas factorisé. Déclarer le domaine des variables et obtenir :
a :ε Real (0, ∞)
b :ε Real (0, ∞)

$\sqrt{(a\cdot b)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$(\sqrt{x})^2 = x$ mais problème pour -1 en substituant *x* par -1 : $\sqrt{(-1)}^{\,2} = -1$
A ne pas confondre avec $\sqrt{(x^2)}$ qui donne bien $|x|$.

Défauts de Derive

- Le manque de messages d'erreurs
- Ergonomie : la diversité des options, le système de déclaration, la complexité de l'utilisation du graphisme et en particulier la difficulté pour déclarer le domaine de variation de la variable pour la représentation graphique d'une fonction.
- Le logiciel propose des réponses du genre $\sqrt{(-1)} = -1$, ln(-1), 1/0, des écritures de solutions réelles faisant intervenir le complexe *i*.
- On aimerait pouvoir "faire des démonstrations"

III Fonction du second degré

Etude de $y = -2 \cdot x^2 + x + 3$

TABLE$(-2 \cdot x^2 + x + 3,\ x,\ -2,\ 2,\ 1)$

$$\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Le changement de variable obtenu par substitution de *x* par *x* +1/4

$$-2 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{4}\right) + 3$$

permet d'obtenir la fonction paire

$g(x) := -\ 2 \cdot x^2 + \dfrac{25}{8}$ montrant que la droite d'équation *x*=1/4 est axe de symétrie.

Vérifier la parité en calculant

$$g(-x) = \frac{25}{8} - 2 \cdot x^2$$

Dérivée $\dfrac{d}{dx}(-\ 2 \cdot x^2 + x + 3) = 1 - 4 \cdot x$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a se calcule avec la fonction TANGENT(f(x),x,a) :

TANGENT$(-\ 2 \cdot x^2 + 3,\ x,\ 1)$ $\qquad 5 - 3 \cdot x$

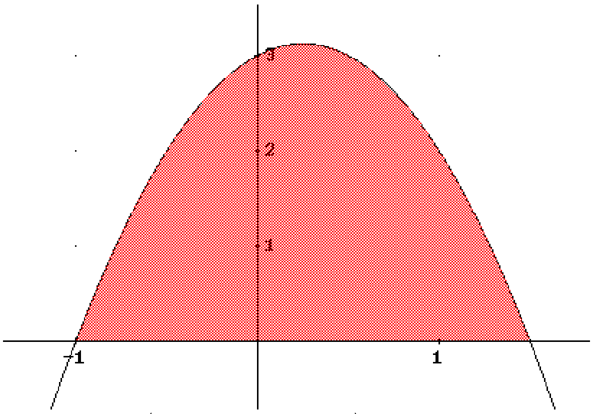
Equation $f(x) = 0$:

SOLVE$(-\ 2 \cdot x^2 + x + 3,\ x)$

$$x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$

Intégrales :

$$\int (-2\cdot x^2 + x + 3)\,dx = -\frac{2\cdot x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3\cdot x$$



$$\int_{-1}^{3/2} (-2\cdot x^2 + x + 3)dx = \frac{125}{24}$$

PlotInt(u, f, a, b) trace l'aire associée à l'intégrale définie de la fonction f(x) de x = a à b. Pour que PlotInt fonctionne, l'option Options > Simplification avant tracé de la fenêtre Graphe-2D doit être activée.

PlotInt($-2\cdot x^2+x+3$, x, -1, 3/2)

IV Fonction du 3ème degré

Eude de $f(x) = x^3 - 3\cdot x^2 + x + 1$

Factorisation

$f(x) = (x - 1)\cdot(x^2 - 2\cdot x - 1)$

$\quad = (x - 1)\cdot(x + \sqrt{2} - 1)\cdot(x - \sqrt{2} - 1)$

Dérivée :

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 3\cdot x^2 + x + 1) = 3\cdot x^2 - 6\cdot x + 1$$

Pour l'équation de la tangente au point d'abscisse *a*, n'utilisons pas la fonction TANGENT(f(x),x,a), mais aidons-nous du logiciel pour le calcul de l'équation *y* = df(*a*) (*x*-*a*) + f(*a*) :

Substituer *x* par *a* :

$f(a) = a^3 - 3\cdot a^2 + a + 1$ et $df(a) = 3\cdot a^2 - 6\cdot a + 1$

L'équation est alors : $(3\cdot a^2 - 6\cdot a + 1)\cdot(x - a) + a^3 - 3\cdot a^2 + a + 1$

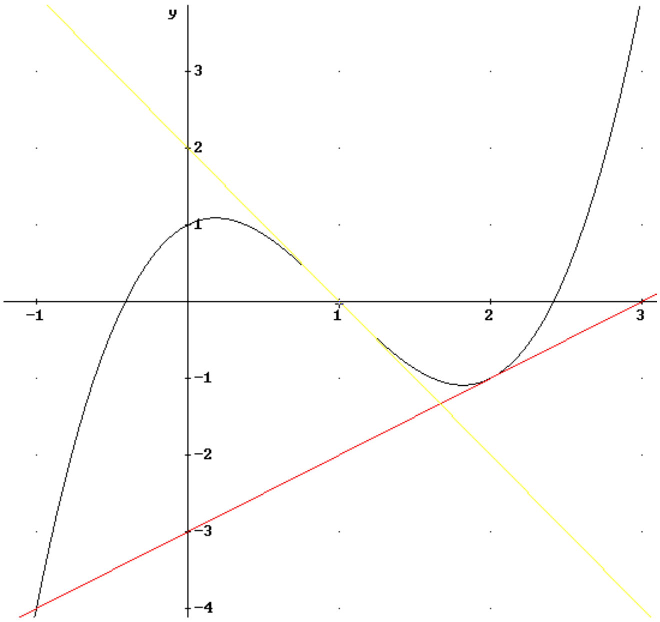
En substituant *a* par 2 on trouve : $x - 3$

Pour trouver les abscisses des points d'intersection de cette tangente et de la courbe résoudre :

SOLVE($x^3 - 3\cdot x^2 + x + 1 = x - 3$, x, Real) soit $x = 2 \vee x = -1$

En déclarant a := 1 le calcul de $(3\cdot a^2 - 6\cdot a + 1)\cdot(x - a) + a^3 - 3\cdot a^2 + a + 1$ donne $2 - 2\cdot x$ équation de la tangente au point d'inflexion I(1, 0).

Pour supprimer la valeur de *a* déclarer : a:=



Il est intéressant de déclarer la définition de la fonction et de sa dérivée :

`f(x) := x³ − 3·x² + x + 1`

`df(x) := 3·x² − 6·x + 1`

L'équation de la tangente s'écrit alors :

`df(a)·(x − a) + f(a)`

La substitution de *a* par -1 :

`df(−1)·(x+1) + f(−1)` permet le calcul de l'équation `10·x + 6`

Tous ces calculs peuvent se faire ou se vérifier avec la fonction de Derive :

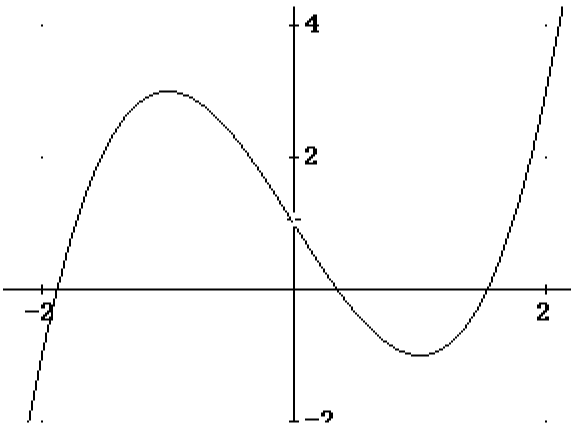
`TANGENT(x³ − 3·x² + x + 1, x, a)`

Le changement de variable obtenu par substitution de *x* par *x* +1

`(x + 1)³ − 3·(x + 1)² + (x + 1) + 1`

permet d'obtenir la fonction impaire $x^3 - 2\cdot x$ montrant que I(1, 0) est centre de symétrie.

Equation du 3ème degré



Equation $x^3 - 3\cdot x + 1 = 0$

`SOLVE(x³ − 3·x + 1, x, Real)`

$$x = 2\cdot \mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\pi}{9}\right)$$

$$\vee\ x = -\ 2\cdot \mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\vee\ x = 2\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

S'explique par la méthode trigonométrique de résolution basée sur la linéarisation de $\cos^3 x$

J.P. Sorribas Bulletin APM n° 398

Derive sait aussi pour l'équation : $x^3 - 5\cdot x^2 + 3\cdot x + 2 = 0$
Trouver ce genre de solutions exactes !

SOLVE($x^3 - 5\cdot x^2 + 3\cdot x + 2$, x, Real)

$$x = \frac{5}{3} - \frac{8\cdot \mathrm{COS}\left(\dfrac{2\cdot \mathrm{ACOT}\left(-\dfrac{\sqrt{1407}}{63}\right)}{3}\right)}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} - \frac{8\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{2\cdot \mathrm{ATAN}\left(\dfrac{\sqrt{1407}}{63}\right)}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)}{3}$$

$$x = \frac{8\cdot \mathrm{COS}\left(\dfrac{2\cdot \mathrm{ATAN}\left(\dfrac{\sqrt{1407}}{63}\right)}{3}\right)}{3} + \frac{5}{3}$$

V Fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^2 + 5\cdot x - 10}{x - 2}$$

Développer pour obtenir la décomposition en éléments simples

$$\frac{4}{x - 2} + x + 7$$

Le calcul de la dérivée est :

$$\frac{d}{dx}\ \frac{x^2 + 5\cdot x - 10}{x - 2} = \frac{x\cdot(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

En substituant *x* par *x*-1 puis en retranchant 4 on obtient une nouvelle fonction dont l'étude sera similaire à la précédente.

$$\frac{x^2 + 3\cdot x - 14}{x - 3} - 4 = \frac{4}{x - 3} + x + 2 = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

VI Equation du quatrième degré

SOLVE($2\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 12\cdot x^2 - 7\cdot x + 6$, x, Real)

$$x = \frac{1}{2} \lor x = -3 \lor x = 2 \lor x = -1$$

Equation symétrique

Résoudre $6\cdot x^4 - 5\cdot x^3 - 38\cdot x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$

Diviser par x^2:

$6\cdot x^2 - 5\cdot x - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - 38$ et faire le changement de variable :

$u = x + \frac{1}{x}$

$6u^2 = 6\cdot\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6\cdot x^2 + \frac{6}{x^2} + 12$

On est amené à résoudre l'équation du second degré : $6\cdot u^2 - 5\cdot u - 50 = 0$

$u = \frac{10}{3} \vee u = -\frac{5}{2}$

Le retour à la variable *x* permet de résoudre deux équations :

$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ Multiplier par *x* et trouver les deux solutions de l'équation du second degré :

$x = \frac{1}{3} \vee x = 3$

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ a pour solutions $x = -\frac{1}{2} \vee x = -2$

La factorisation est bien $(x + 2)\cdot(x - 3)\cdot(2\cdot x + 1)\cdot(3\cdot x - 1)$

VII Equation pas à pas

a. Forme canonique du trinôme : Exemple $-2\cdot x^2 + x + 3$

Diviser par -2 :

$\frac{-2\cdot x^2 + x + 3}{-2} = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

1/2 est le double de 1/4 qui a pour carré 1/16 que l'on ajoute au deux membres de l'égalité :

$\left(x^2 - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{16}$

$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \frac{25}{16}$

En factorisant

$\frac{(4\cdot x - 1)^2}{16} = \frac{5^2}{2^4}$

La forme canonique est donc :

$-2\cdot\left(\frac{(4\cdot x - 1)^2}{16} - \frac{5^2}{2^4}\right)$

La factorisation est $(x + 1)\cdot(3 - 2\cdot x)$

b. Résolution de systèmes linéaires par combinaison

Affecter les deux équations à deux variables *a* et *b*

$a := 2 \cdot x - 3 \cdot y = 7$

$b := 3 \cdot x + 4 \cdot y = 2$

Dérive permet de trouver les solutions :

SOLVE([a, b], [x, y]) $\qquad [x = 2 \wedge y = -1]$

Le calcul des combinaisons $4 \cdot a + 3 \cdot b$ donne $17 \cdot x = 34$ en divisant par 17

$\dfrac{17 \cdot x = 34}{17}$ on a $x = 2$

De même le calcul de $-3 \cdot a + 2 \cdot b$ donne $17 \cdot y = -17$ d'où $y = -1$

VIII Fonctions affines par morceaux.

Par exemple on peut considérer la définition suivante :

f(x) = 2x si x est inférieur ou égal à 3 et f(x) = x + 3 si x est supérieur à 3.

Pour utiliser cette fonction avec le logiciel
- soit : déclarer>fonction avec comme nom f(x) et comme définition de la fonction : IF(x <= 3, 2x, x + 3)
- soit écrire directement f(x) := IF(x <= 3, 2x, x + 3)

D'une façon générale on utilise la syntaxe du si suivante :

IF(<condition>, <valeur vraie>, <valeur faux>).

Fonction définie uniquement sur un intervalle

Exemple : la fonction x -> *f*(x) = x²-3 sur [-2, 3]
Il existe dans Derive la fonction caractéristique d'un intervalle, c'est la fonction CHI :
CHI(-2,x,3,1) avec le dernier paramètre égal à 1 pour $-2 \le x \le 3$ et est égal à 0 pour $-2 < x < 3$.
Si on remplace le 1final par 0, l'intervalle est ouvert.
Pour définir la fonction *f* sur [-2, 3] il suffit donc de diviser par CHI(-2,x,3,1) (en effet le quotient n'existe que si *x* appartient à [-2;3]).
La ligne d'instruction f(x):=(x^2-3)/CHI(-2,x,3,1) répond à la question.

IX Intégrales

Intégration par partie de $x^n \sin(x)$

$$\frac{d}{dx}(x\cdot \mathrm{COS}(x)) = \mathrm{COS}(x) - x\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

$$\int x\cdot \mathrm{SIN}(x)\, dx = \mathrm{SIN}(x) - x\cdot \mathrm{COS}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2\cdot \mathrm{COS}(x)) = 2\cdot x\cdot \mathrm{COS}(x) - x^2\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

$$\int x^2\cdot \mathrm{SIN}(x)\, dx = (2 - x^2)\cdot \mathrm{COS}(x) + 2\cdot x\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3\cdot \mathrm{COS}(x)) = 3\cdot x^2\cdot \mathrm{COS}(x) - x^3\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

$$\int x^3\cdot \mathrm{SIN}(x)\, dx = x\cdot(6 - x^2)\cdot \mathrm{COS}(x) + 3\cdot(x^2 - 2)\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n\cdot \mathrm{COS}(x)) = n\cdot x^{n-1}\cdot \mathrm{COS}(x) - x^n\cdot \mathrm{SIN}(x)$$

Intégration par partie de $x^n \ln x$

$$\frac{d}{dx}(x\cdot \mathrm{LN}(x)) = \mathrm{LN}(x) + 1$$

$$\int \mathrm{LN}(x)\, dx = x\cdot \mathrm{LN}(x) - x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2\cdot \mathrm{LN}(x)) = 2\cdot x\cdot \mathrm{LN}(x) + x$$

$$\int x\cdot \mathrm{LN}(x)\, dx = \frac{x^2\cdot \mathrm{LN}(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3\cdot \mathrm{LN}(x)) = 3\cdot x^2\cdot \mathrm{LN}(x) + x^2$$

$$\int x^2\cdot \mathrm{LN}(x)\, dx = \frac{x^3\cdot \mathrm{LN}(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$$

Derive calcule cette primitive pour tout, sans s'embarrasser du fait que *n* soit un entier naturel.

$$\int x^n\cdot \mathrm{LN}(x)\, dx = \frac{x^{n+1}\cdot \mathrm{LN}(x)}{n + 1} - \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}$$

Un exemple de bug

$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\infty^{n+1} \cdot (n+1)}$$

Bug qui disparaît si l'on déclare n naturel non nul :

`n :ε Integer (1, ∞)`

$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

X Suites (Foire aux questions – Derive - ac-versailles.fr).

Représentation graphique d'une suite fonctionnelle

On peut définir la suite comme une fonction u de n par exemple : $u(n)$:=(2n-1)/(n+1)
puis représenter les points de coordonnées (n, $u(n)$).
Avec Derive, les coordonnées d'un point sont définies par une liste de deux nombres (donc deux nombres séparés par une virgule, le tout entre crochets [n, $u(n)$]).
Pour représenter plusieurs points il suffit de définir une liste des coordonnées de ces points. Pour cela on peut utiliser l'outil VECTOR.
VECTOR([n,u(n)],n,0,9) va créer la liste des coordonnées des 10 premiers points.
Si vous allez alors dans la fenêtre graphique pensez à deux choses :
1) dans le menu **options**, cochez la case **simplifier avant de tracer**,
2) dans le menu **affichage** > **points** choisissez les **cases non liées et larges**.

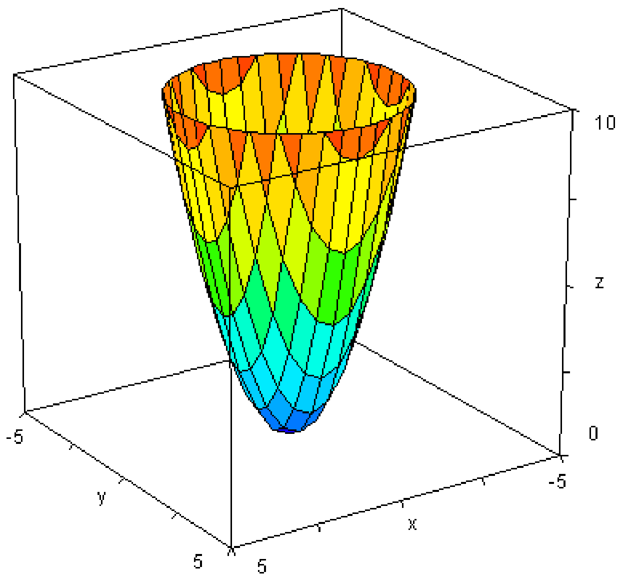
Suite récurrente

Le logiciel Derive utilise la récursivité, c'est à dire la possibilité pour définir une fonction f d'utiliser cette fonction.
Attention de ne pas tomber dans une boucle infernale ! Pensez à définir le premier terme en utilisant la fonction IF (<n = 0>, <premier terme>, <formule de récurrence>).
Exemple : soit à définir la suite définie si n>0 par $u_{n+1} = 1-u_n/2$ et $u_0 = 5$
Décaler de 1 les indices, u(n) = 1-u(n-1)/2 et u(0)=5,
déclarer dans Derive u(n):=IF(n=0,5,1-u(n-1)/2)
Attention cependant à n'utiliser cette fonction u qu'avec des constantes entières positives: demander $u(n)$ provoque une erreur et il n'y a pas de traitement d'erreur dans cette définition.

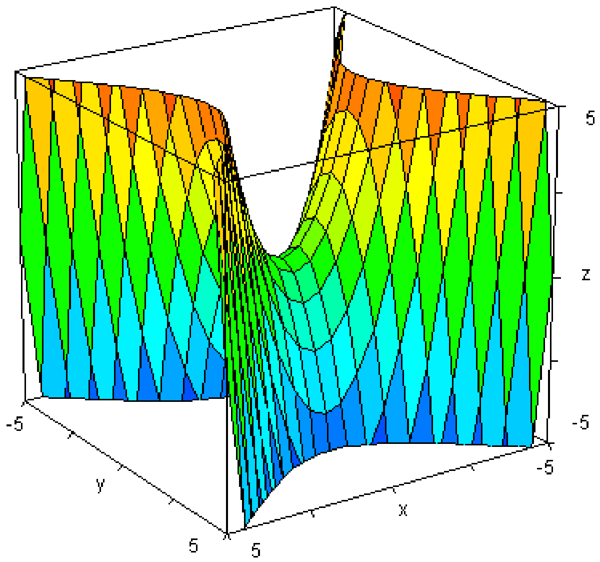
XI Graphe 3D

Tracer des surfaces de l'espace d'équation $z = f(x, y)$
Utiliser les flèches du clavier pour faire tourner les figures en changeant de point de vue.

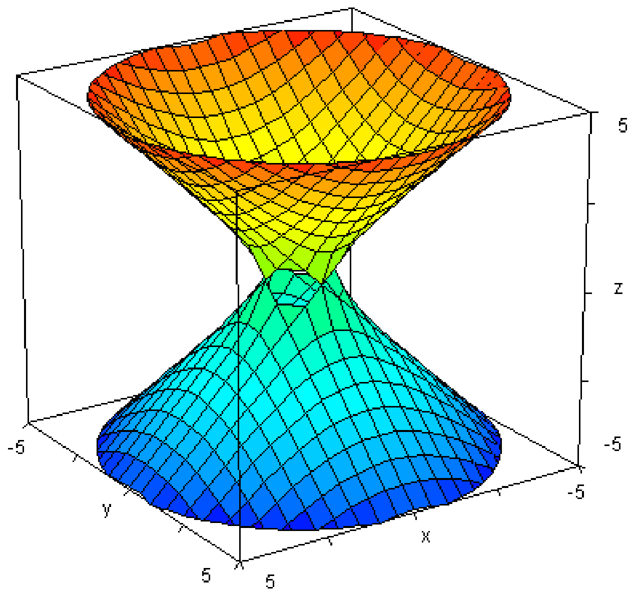
Paraboloïde elliptique (bol) : solide de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$.



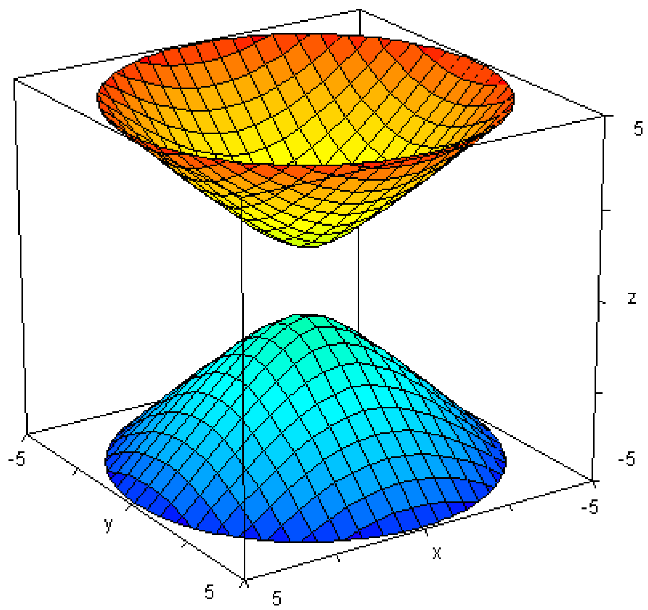
Paraboloïde à selle : paraboloïde hyperbolique d'équation z = x2 - y2 (ou z = xy).



Hyperboloïde a une nappe $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.



Hyperboloïde a deux nappe $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.



XII Méthode d'Euler

Solutions numériques approchées d'équations du premier ordre

Le fichier ODE_APPR.MTH définit la fonction EULER_ODE(r, x, y, x0, y0, h, n) : un vecteur de n+1 points approximation des solutions de l'équation y'=(r,y) avec y=y0 en x=x0, en commençant par x=x0 avec un pas de h. EULER utilise la méthode d'Euler pour produire un vecteur de n+1 couples de coordonnées de la forme :

[[x0, y0], [x0+h, y1], [x0+2·h, y2], ..., [x0+n·h, yn]]

Ce vecteur se trace comme un ensemble de points de la courbe solution de l'équation. Par exemple, pour engendrer cinq points d'une solution approchée de l'équation y' = 26/(3+(x+y)²) pour lequel y=-2, à x=2, cherchez une valeur approchée de

$$\mathrm{EULER\_ODE}\left(\frac{26}{3+(x+y)^2},\ x,\ y,\ 1,\ -2,\ \frac{1}{4},\ 4\right)$$

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1.25 & -0.375 \\ 1.5 & 1.35114 \\ 1.75 & 1.93520 \\ 2 & 2.32722 \end{pmatrix}$$

La méthode d'Euler a un intérêt éducatif car c'est la méthode numérique la plus simple pour résoudre des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, mais elle est de façon typique, celle qui a la marge d'erreur la plus importante parmi les méthodes standard.