Fractions égyptiennes

Décomposition d'un nombre en fractions égyptiennes, conjecture de Sierspinski

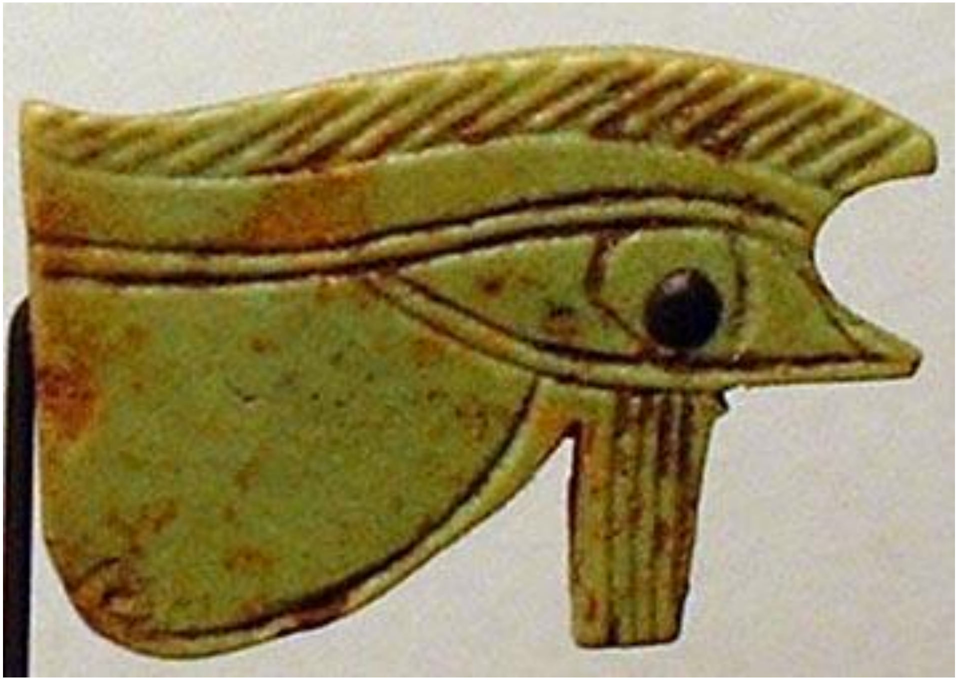
Stage "*Mathématiques et informatique*" - Ouagadougou février 1999

Sommaire

Site Descartes et les Mathématiques : http://debart.pagesperso-orange.fr/

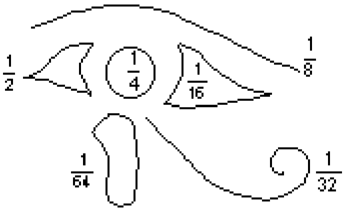
Document Word : http://www.debart.fr/doc_dp/fracegypt.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf_dp/fracegypt.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/ti92/fracegypt.html

Document n° 28, créé le 16/12/2002 - mis à jour le 11/5/2004

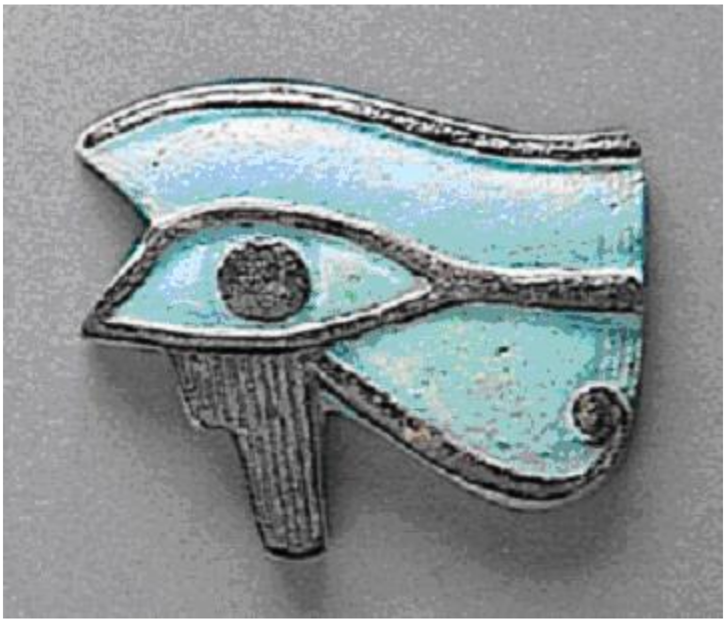


1. Historique : l’œil oudjat

L’œil oudjat est un hybride d’œil humain et d’œil de faucon : il représente un œil humain fardé et souligné de deux marques colorées caractéristiques du faucon pèlerin.
Il serait l’œil d’Horus, fils d’Isis et d’Osiris, perdu dans un combat mené contre son oncle Seth pour venger son père.
Thot, grand guérisseur et dieu de la médecine, l'avait soigné et le lui avait rendu. C’est pourquoi «oudjat» symbolisait la santé et la lumière. L’oudjat incarnait aussi le cycle du jour et de la nuit.
On le retrouve comme amulette sur les momies : l’amulette représentait aussi l’attachement du fils à son père, car Horus avait donné son œil à son père Osiris afin qu’il recouvre la vue.
Les anciens Égyptiens avaient coutume d’encastrer l’oudjat dans les niches de leurs portes pour se préserver du mauvais œil.



Les parties constituantes de l'œil oudjat servaient à écrire les différentes fractions ayant 64 comme dénominateur qui permettaient de compter le grain, dont l'unité de mesure était le hékat (un hékat valait environ 4,785 litres).



Au cours du combat, Seth arrache l'œil gauche d'Horus, le coupe en six morceaux et le jette dans le Nil. À l'aide d'un filet, Thot récupère les morceaux, mais il en manque un ! Thot le rajoute et rend à Horus son intégrité vitale. La somme des fractions de l'oudjat ne fait que $\frac{63}{64}$; le $\frac{1}{64}$ manquant est le liant magique ajouté par Thot pour permettre à l'œil de fonctionner. Ce 1/64 manquant pour parfaire l'unité serait toujours fourni par Thot au calculateur qui se placerait ainsi sous sa protection.

D'après S. Ismail
et F. Saugeon (collège de Blaye)

2. Décomposition d'un nombre en fractions égyptiennes

a) Introduction

Les anciens Égyptiens ne connaissaient, comme rationnels, que les inverses d'entiers.
Il s'agit de décomposer un rationnel de]0 ; 1[en une somme d'inverses d'entiers strictement croissants.

Exemples : $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22}$.

Remarques : la représentation sous forme d'une somme de fraction à numérateurs unitaires n'est pas unique. Par exemple, on a aussi $\frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ car $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. C'est pourquoi, les anciens Égyptiens avaient décidé d'utiliser celle contenant le moins de termes et n'en répétant aucun.

On ne sait pas très bien comment les Égyptiens procédaient pour cette obtenir cette décomposition.
Par contre, on sait que pour une fraction du type $\frac{2}{pq}$ (p et q impairs) ils obtenaient :

$\frac{2}{15} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ en appliquant la formule : $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$.

b) Quelques exemples simples à réaliser en classe

Travail de groupes sur les mêmes fractions.
Un rapporteur écrit au tableau les résultats de son groupe.
Comparaison des résultats (unicité, " meilleure décomposition possible "…).
$\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{5}{7}$.

c) Plus compliqués

$\frac{11}{13}$; $\frac{17}{19}$; $\frac{15}{16}$.
Cela devient difficile à la main…d'où la nécessité d'un algorithme.

d) Algorithme

Première phase de recherche par groupes.
On espère voir sortir l'encadrement de la fraction par deux inverses d'entiers consécutifs *n* et *n+1*.
Sinon, on le suggère.
Deuxième phase de recherche au terme de laquelle l'algorithme sera soit trouvé soit donné.

e) Programmation de l'algorithme

Sur des types de matériels informatiques différents (calculatrices, ordinateurs…).
Comparaison des difficultés rencontrées, des performances et des résultats.

f) Démonstration (recherche en classe, rédaction à la maison)

Démonstration guidée pas à pas, sous forme d'exercice.

- Recherche du dénominateur n de la fraction $\frac{1}{n}$,
- Exprimer $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} - \frac{1}{n}$ en fonction de $\frac{p}{q}$.
- La suite des numérateurs des différences est strictement décroissante (finitude).
- Dans la décomposition, la suite des dénominateurs est strictement croissante (toutes les fractions sont distinctes).

g) Prolongements (travail maison)

- $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$: en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, trouver une décomposition de a_n en fractions égyptiennes. Comparer avec l'algorithme pour a_2, a_3, a_6.
- $b_n = \frac{2}{2n+1}$: prouver que b_n se décompose en exactement deux fractions égyptiennes, et donner une décomposition.

- Quel est le nombre maximum de fractions obtenues ***par l'algorithme*** dans la décomposition de $\frac{4}{n}$ avec $n>4$?

  Le nombre maximum est trois d'après la conjecture d'Erdos-Strauss. Allan Swett a confirmé que l'équation $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ admet des solutions pour n jusqu'à 10^{12}.

h) Des limites de l'algorithme

- ***Une limite de l'algorithme :*** décomposer $\frac{4}{65}$ avec l'algorithme … et pourtant :

$$\frac{4}{65}=\frac{1}{26}+\frac{1}{65}+\frac{1}{130}$$

- ***Une autre :*** calculer une décomposition en fractions égyptiennes de $(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7})^2$ par deux méthodes différentes.
- ***Une dernière :*** sur certains matériels, les grands dénominateurs que donne l'algorithme dépassent les capacités de calcul (exemple sur Excel).

i) Algorithme de Fibonacci

En 1201, Fibonacci (Leonard de Pise 1175-1250) prouva que tout nombre rationnel pouvait s'écrire sous la forme d'une somme de fractions à numérateur unitaire et proposa la méthode suivante : *"Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'opération donne une fraction égyptienne."*

Cet algorithme permet l'obtention des dénominateurs de la décomposition de $\frac{p}{q}$:

Il suffit de calculer *n*, partie entière de $\frac{p}{q}$ + 1,

puis de calculer $\frac{p}{q} - \frac{1}{n}$,

et de recommencer, avec cette dernière fraction, jusqu'à ce que le numérateur soit égal à 1.

Remarque : il est possible de trouver des inverses égaux comme pour $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.
Ce développement n'est pas acceptable, transformer le deuxième tiers avec la formule
$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ soit $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$,

et l'on obtient $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

Utilisation de la TI-92

La TI 92 permet de faire les calculs directement dans le mode fractionnaire exact, la simplification des fractions se faisant automatiquement.

Il possible de rédiger cet algorithme dans l'éditeur de programmes :

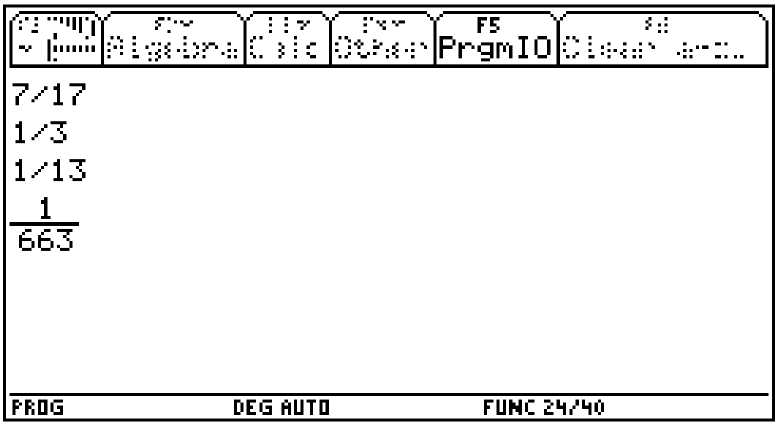
```
EGYPT(x)
Prgm
Local p,q,f,n
ClrIO
Disp x
getNum(x) → p
While p>1
getDenom(x) → q
If mod(q,p)=0 Then
q/p → n
Else
int(q/p)+1 → n
EndIf
Disp 1/n
x-1/n → x
getNum(x) → p
EndWhile
Disp x
EndPrgm
```

Puis exécuter le programme en tapant :

Egypt(7/17)

dans la fenêtre ♦home.

On obtient :



Taper sur la touche F5 ou sur ♦home pour sortir du programme.

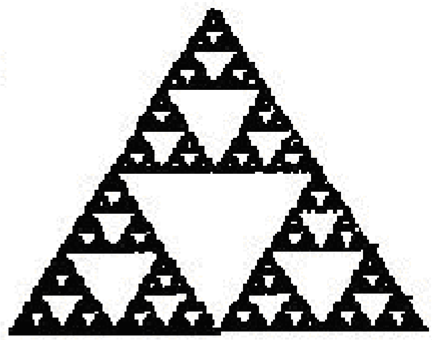
3. Waclaw SIERPINSKI

(Varsovie 1882 - 1969)

Mathématicien polonais, professeur à l'université de Lvov puis de Varsovie, il consacre ses recherches à la théorie des nombres. Il est bien connu par ses travaux :

- sur la théorie analytique des nombres,
- sur les images fractales : à partir d'une figure de base, répéter indéfiniment une transformation,
- sur les courbes permettant de remplir un carré.

Le triangle de Sierpinski est obtenu en partant d'un triangle équilatéral. On prend les milieux de chacun de ses côtés et on enlève le triangle équilatéral ainsi obtenu. On obtient alors trois nouveaux triangles équilatéraux. On recommence alors l'opération précédente à chacun de ces nouveaux triangles, et ainsi de suite. On obtient alors neuf, vingt-sept, quatre-vingt-un, ... nouveaux triangles.

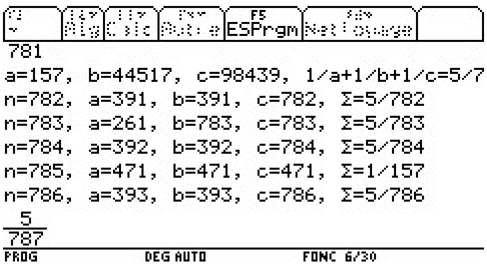


4. Conjoncture de Sierpinski

(Voir 3'33 magazine des calculatrices Casio n° 40 et 41)

Pour tout entier $n>1$ il existe trois entiers naturels a, b et c tels que

$$\frac{5}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$



Il semble que l'on ne sache pas encore démontrer cette conjoncture.

La TI-92, en une journée, sait la vérifier jusqu'à n=1000.

a) Quelques pistes de recherche :

si n est multiple de 2 : $n = 2p$ $\qquad \frac{5}{2p}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}$

si n est multiple de 3 : $n = 3p$ $\qquad \frac{5}{3p}=\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}$

si n est multiple de 5 : $n = 5p$ $\qquad \frac{5}{5p}=\frac{1}{p}=\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}$

Pour les nombres n premiers de 7 à 37, en s'aidant éventuellement de l'algorithme de la deuxième partie, on a les résultats suivants :

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14} \qquad \frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{99}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$$

$$\frac{5}{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{780}=\frac{1}{3}+\frac{1}{39}+\frac{1}{39} \qquad \frac{5}{17}=\frac{1}{4}+\frac{1}{23}+\frac{1}{1564}=\frac{1}{4}+\frac{1}{34}+\frac{1}{68}$$

$$\frac{5}{19}=\frac{1}{4}+\frac{1}{76}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{76} \qquad \frac{5}{23}=\frac{1}{5}+\frac{1}{58}+\frac{1}{6670}=\frac{1}{5}+\frac{1}{115}+\frac{1}{115}$$

$$\frac{5}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{174}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{174} \qquad \frac{5}{37}=\frac{1}{8}+\frac{1}{99}+\frac{1}{29304}=\frac{1}{8}+\frac{1}{148}+\frac{1}{296}$$

$$\frac{5}{31}=\frac{1}{7}+\frac{1}{55}+\frac{1}{3979}+\frac{1}{23744683}+\frac{1}{1127619917\,796295}=\frac{1}{7}+\frac{1}{62}+\frac{1}{434}$$

On remarque :
- que la décomposition en général n'est pas unique,
- que l'algorithme des fractions égyptiennes donne, lorsqu'il permet d'obtenir trois fractions, un nombre *c* en général assez grand.

b) Algorithme

Pour *n* fixé, choisir *a* égal à la partie entière de $\frac{n}{5}$.

Calculer de 1 en 1 les valeurs de *b* jusqu'à trouver que le nombre $\frac{5}{n}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ soit l'inverse d'un entier. En cas d'échec recommencer en augmentant *a* de 1.

Le plus efficace est de calculer de -1 en -1 pour *b* à partir de la partie entière de $\dfrac{2}{\frac{5}{n}-\frac{1}{a}}$ jusqu'à *a*.

c) Programme TI-92

```
Sierpin(n)
Prgm
drap→0
5/n→x
numér(x) →p
dénom(x) →q
If p=1 then
q→a
else
ent(q/p) →a
endif
x-1/a→y
numér(y) →p
dénom(y) →q
If p=1 then
2*q→b
2*q→c
2→drap
endif
If p=2 then
q→b
q→c
2→drap
endif
If drap=2 then
disp a b c
else
ent(2/y)+1→b
while drap<1
b+1→b
if b≤a then
a+1→a
x-1/a→y
ent(2/y)→b
disp x a
endif
y-1/b→z
if numér(z)=1 then
dénom(z)→c
1→drap
disp a b c
endif
if 3/a<x then
disp "pas de
solution"
pause
3→drap
endif
endwhile
endif
endPrgm
```