Les grands problèmes de la géométrie grecque

Nombres constructibles, quadrature, duplication, trisection, polygones réguliers.

Sommaire

Site Descartes et les Mathématiques : http://debart.pagesperso-orange.fr/

Document Word : http://www.debart.fr/doc_dp/grands_problemes.doc
Document PDF : http://www.debart.fr/pdf_dp/grands_problemes.pdf
Page HTML : http://debart.pagesperso-orange.fr/histoire/grands_problemes.html

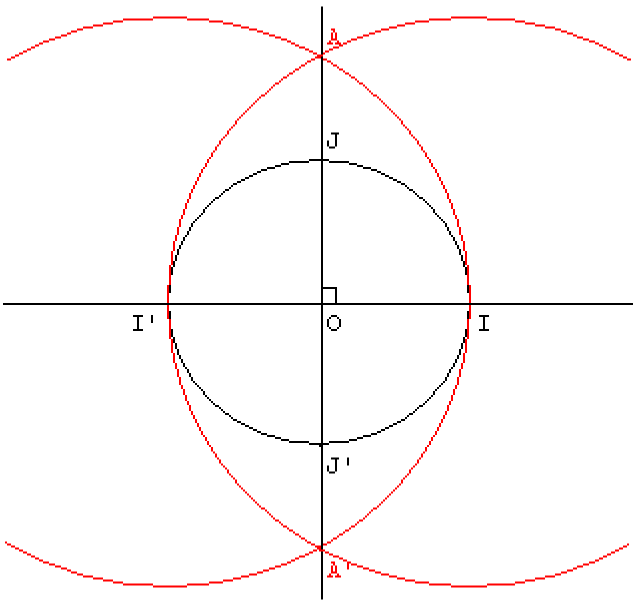
Document n° 80, créé le 14/3/2005, modifié le 3/10/2009

1. Points et nombres constructibles

Point constructible

Définition : un point est constructible à partir d'un ensemble E si je peux le construire d'une façon précise à partir de E, à la règle non graduée et au compas.
Plus précisément l'ensemble E_1 des éléments constructibles en une étape à partir d'un ensemble E est formé par :
- les points de E,
- les points d'intersection des droites distinctes passant par deux points distincts de E,
- les points d'intersection des cercles distincts de centre un point de E, passant par un autre point de E,
- les points d'intersection des droites et des cercles définis ci-dessus.

De même, E_2 est l'ensemble des éléments constructibles en une étape à partir de E_1, E_3 à partir de E_2, et ainsi de suite.



Définition : un point M est constructible à partir de E, s'il existe un i tel que M appartienne à E_i (on peut construire M en i étapes).

Définition : on appelle point constructible du plan (euclidien), tout point constructible à partir de E = {O, I} où OI =1.

Application : montrons que le point J(0, 1) est constructible avec la construction de la médiatrice d'*Œnopide de Chio* (V^e siècle avant J.-C.) :

E_1 contient le point I', intersection de la droite (OI) et du cercle de centre O passant par I.

E_2 contient les points A et A', intersections du cercle de centre I passant par I' et du cercle de centre I' passant par I.

La médiatrice (AA') de [II'] coupe le cercle de centre O passant par I en J et J', points de E_3.

(O ; I ; J) est un repère orthonormé du plan euclidien.
Définition : on appelle nombre constructible toute coordonnée dans le repère (O ; I ; J) d'un point constructible.

Propriété : un point M(a, b) est constructible si et seulement si a et b sont des nombres constructibles.

Propriétés

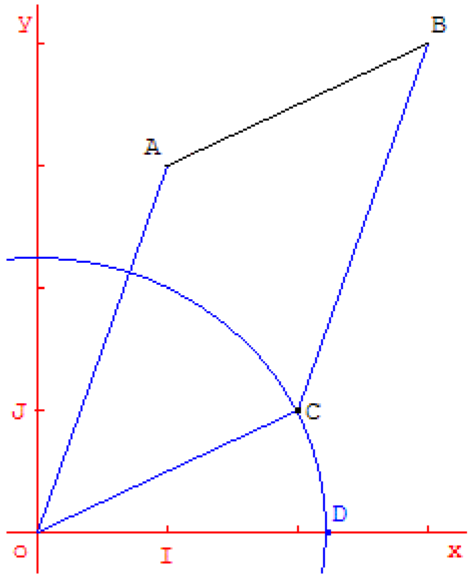
Si A et B sont deux points constructibles, alors la distance AB est un nombre constructible.

Indications :

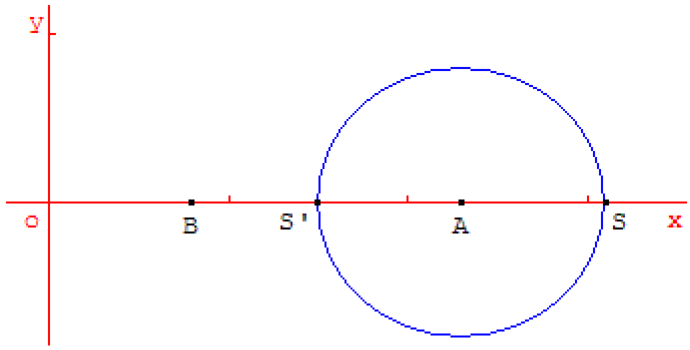
Le point C troisième point du parallélogramme OABC est constructible.

Le point D est constructible avec OD = OC = AB = d.

Le nombre d, abscisse d'un point constructible, est constructible.

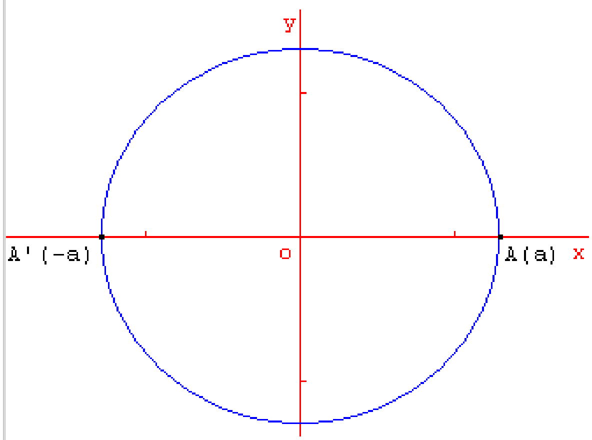


La somme de deux nombres constructibles est constructible.

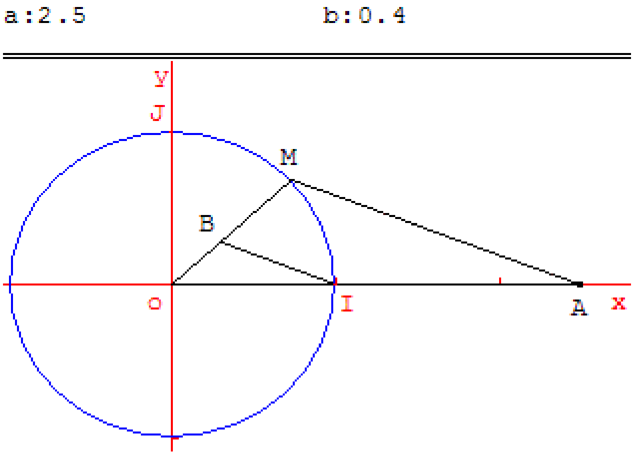


Soit a et b deux nombres constructibles ; A et B les points constructibles d'abscisses a et b. En traçant le cercle centre A et de rayon b le nombre $a+b$ correspond au point constructible S si a est positif, au point S' s'il est négatif. $a+b$ est donc constructible

L'opposé d'un nombre constructible est constructible.



Le produit de deux nombres constructibles est constructible.
Voir : théorème de Thalès dans la géométrie de Descartes.



L'inverse d'un nombre constructible non nul est constructible.

A a pour abscisse a.

M est un point du cercle non situé sur Ox.

La parallèle à (AM) menée par I coupe (OM) en B.

Le point B est constructible et sur la droite repérée (O, M) a pour abscisse $\frac{1}{a}$.

1/a est un nombre constructible.

Le quotient d'un nombre constructible par un nombre constructible non nul est constructible.
Voir : Nombre rationnel a/b dans construction de réels en seconde

La racine carrée d'un nombre constructible positif est constructible.
Voir : construction d'Euclide reprise par Descartes dans construction de réels en seconde

Rappel : Un nombre est algébrique sur un corps **K** s'il existe un polynôme non nul, à coefficient dans **K**, s'annulant sur ce nombre.
Sur **Q** un nombre algébrique est solution d'une équation à coefficients entiers.

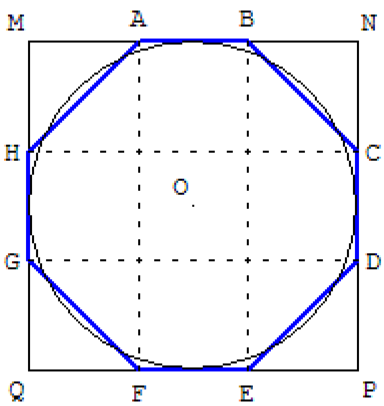
Pierre-Laurent Wantzel, mathématicien français, a montré en 1837 qu'un nombre constructible est algébrique sur Q et son degré est une puissance de 2.
La réciproque est très utile pour montrer qu'un nombre n'est pas constructible.

2. Quadrature du cercle

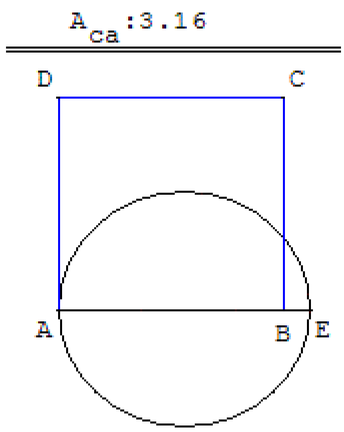
La quadrature du cercle : *tracer à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné.*

Ce problème n'est pas résoluble, car π n'est pas constructible.

Calcul de π dans l'ancienne Égypte



Le papyrus mathématique égyptien le mieux conservé est le papyrus Rhind, écrit par le scribe Ahmés vers 1650 avant J.-C. ; Rhind est le nom du premier propriétaire Écossais qui l'acheta à Louxor en 1857.
Parmi quatre-vingt-sept problèmes, accompagnés de leurs solutions, on trouve la règle suivante pour la quadrature du cercle : pour « *construire un carré équivalent à un cercle... : retirer* $\frac{1}{9}$ *au diamètre et construire le carré sur ce qui reste* ».



L'aire du disque de diamètre 1 est $\frac{\pi}{4}$.

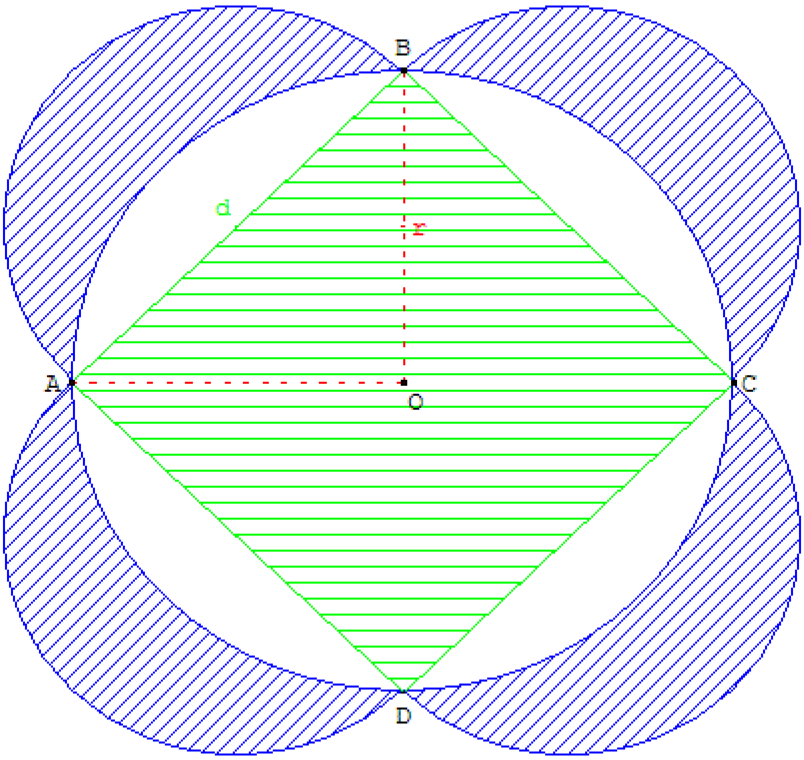
Cette aire du disque est voisine de celle de l'octogone ABCDEFGH.

Son aire, composé de cinq carrés et quatre demi-carrés, est égale à 7 carrés soit $7 \times \frac{9}{81} = \frac{63}{81}$.

Ce nombre $\frac{63}{81}$ est voisin du carré $\frac{64}{81}$, aire du carré de côté $\frac{8}{9}$: $(1 - \frac{1}{9})^2 = \frac{64}{81}$.

Les Égyptiens utilisaient donc pour π la valeur de $4 \times (1 - \frac{1}{9})^2 = \frac{256}{81} \approx 3,16$, avec une incertitude relative de $\frac{6}{1000}$ pour le calcul de π.

Lunules d'Hippocrate



Définition : une lunule est une portion de surface délimitée par deux cercles non concentriques de rayons différents, formant un croissant de lune en forme de ménisque : convexe d'un côté et concave de l'autre.

Les quatre lunules

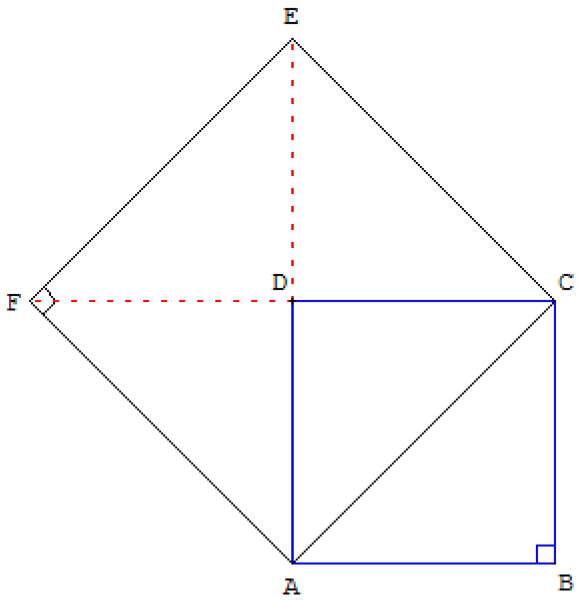
Au V^e siècle avant J.-C. Hippocrate de Chios est le premier à s'être intéressé aux quadratures.

Il n'a pas réussi pour le cercle, mais il prouva la « *quadrature* » des lunules.

Les quatre lunules hachurées en bleu sont les surfaces comprises entre le cercle de rayon *r* circonscrit au carré ABCD et les demi-cercles ayant pour diamètre *d* les côtés du carré :

l'aire du carré ABCD est égale à la somme des quatre aires des lunules.

3. Duplication du carré et du cube

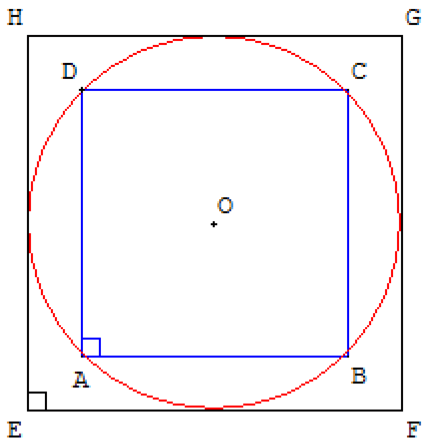


Dans Menon, un dialogue de Platon, Socrate explique la construction ci-dessus à un jeune esclave.

La diagonale du « *petit carré* » le partage en deux triangles isocèles rectangles. Le « *grand carré* » est formé de quatre triangles isocèles rectangles, de même aire.

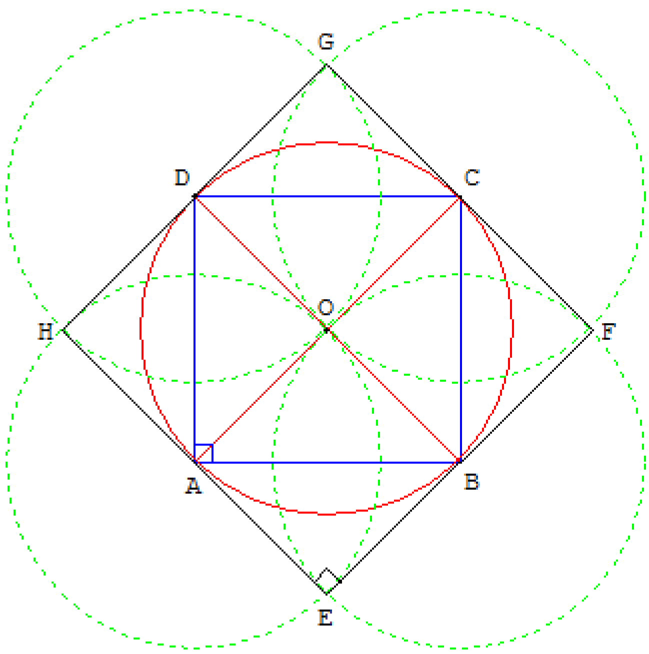
Le rapport des aires des carrés est 2,
Le rapport des côtés est $\sqrt{2}$.

Carrés de Léonard de Vinci



Le carré circonscrit à un cercle a une aire double de celle du carré inscrit dans ce cercle.

Solution de Léonard de Vinci



À partir d'un « *petit carré* » ABCD, de centre O, on trace les cercles centrés sur les sommets, passant par O. Ces cercles se coupent en E, F, G, H, symétriques de O par rapport aux côtés du petit carré. EFGH est un « *grand carré* » tangent au cercle circonscrit à ABCD.

Les diagonales du « *petit carré* » le partage en quatre triangles isocèles rectangles. On obtient le « *grand carré* » avec quatre autres triangles isocèles rectangles de même aire, symétriques des quatre premiers.

Duplication du cube : problème de Délos posé par les sophistes grecs au VI^{e} siècle avant J.-C.

Construire un autel cubique, à la gloire de d'Apollon, de volume deux fois plus grand que celui déjà présent dans le temple.
La duplication du cube n'est pas possible, car $\sqrt[3]{2}$, solution de $x^3 = 2$, n'est pas un nombre constructible.

4. Trisection de l'angle

Partager un angle quelconque en trois angles égaux.

Trouver la trisection d'un angle θ il faut trouver x tel que $3x = \theta$. On a : $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
$\cos x = X$ est donc solution de l'équation $\cos \theta = 4 X^3 - 3 X$
D'après Wantzel, pour que la trisection soit possible, l'équation $4 X^3 - 3 X - \cos \theta = 0$ doit être réductible au second degré dans Q.

Par exemple, la trisection d'un angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{3}$ n'est pas possible :

$\cos(\frac{\pi}{9})$, solution de l'équation irréductible dans Q[X] : $4 X^3 - 3 X - \frac{1}{2} = 0$, est algébrique sur Q de degré 3.

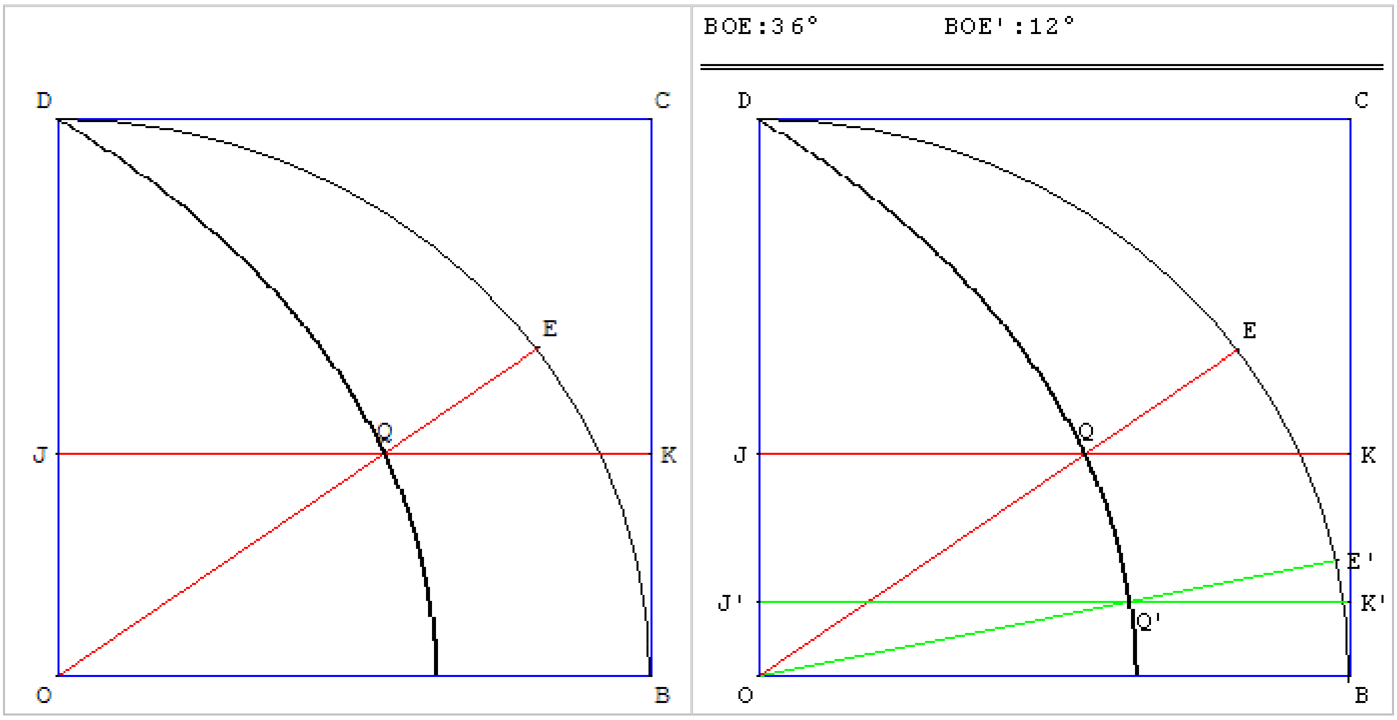
Ce qui montre, du même coup, l'impossibilité de construire à la règle et au compas l'ennéagone régulier (9 côtés), résultat prouvé en 1801 par Gauss.

La quadratrice de Dinostrate

Hippias d'Élis, philosophe sophiste grec, contemporain de Socrate né vers 460 avant J.-C., cherchant à résoudre le problème de la trisection de l'angle, inventa une courbe trisectrice permettant une solution approchée. Le problème étant insoluble, la courbe permet de trouver des solutions approchées. La trisectrice est appelée plutôt la quadratrice de Dinostrate car ce dernier l'utilisa pour résoudre la quadrature du cercle.

Le point K se déplace uniformément sur le segment [BC], ordonnée y, le point E se déplace uniformément sur le quart de cercle BD, angle BÔE : $\theta = \frac{\pi}{2} y$. La droite horizontale (JK) coupe la droite (OE) en Q. La courbe décrite par Q est la quadratrice de Dionostrate.

Soit $OK' = \frac{OK}{3}$ et $OJ' = \frac{OJ}{3}$ correspondant à $\frac{y}{3}$. La droite horizontale (J'K') coupe la quadratrice en Q'. La droite (OQ') est alors une trisectrice de l'angle BÔE.



Quadrature du cercle

OQ sinθ = y. Avec OQ = ρ, comme θ = $\frac{\pi}{2}y$, on a θ = $\frac{\pi}{2}$ ρ sinθ. L'équation polaire de la quadratrice est ρ = $\dfrac{2\theta}{\pi \sin\theta}$.

Le point B' d'intersection de la quadratrice avec [OB] a pour abscisse $\frac{2}{\pi}$. Ce point, non constructible, est obtenu avec une approximation théorique aussi grande que l'on veut.

Viète (1540-1603) calculera le premier produit infini des mathématiques :

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots$$

Conchoïde

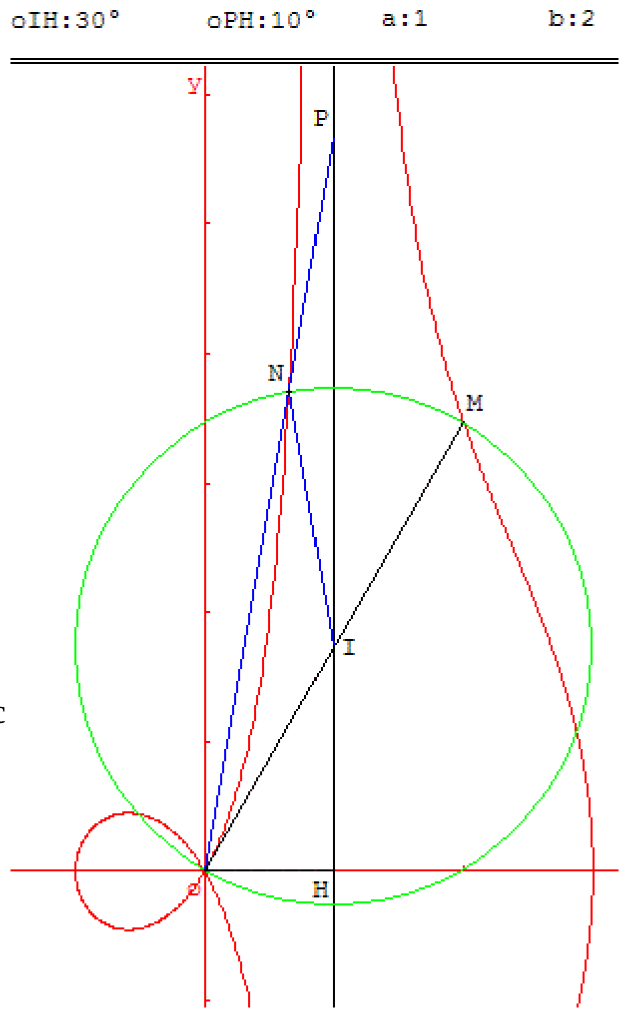
Nicomède (II^e siècle avant J.-C.) : mathématicien grec.

Courbe d'équation polaire $\rho = \frac{a}{\cos\theta} + b$.

Les conchoïdes de Nicomède sont des trisectrices.

Pour cela construire un triangle oHI rectangle en H, tel que l'angle φ à trisecter soit oIH.

Construire la conchoïde de la droite (IH) de pôle o et de module oH ;
le cercle de centre I et de rayon oI coupe la conchoïde en un point M symétrique de o par rapport à I,
et en un deuxième point N dont la construction est approchée.



L'angle trisecté est oPH, car le triangle INP est isocèle avec oPH = NIP = α ;
les angles aigus du triangle isocèle IoN sont égaux à 2α ;
Les angles alternes-internes *y*oP et oPH sont égaux à α ;
Les angles alternes-internes *y*oI et oIH sont égaux à 3α et φ = 3α.

On a : a = oH et $b = \frac{a}{\cos\varphi}$; la conchoïde a pour équation

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{a}{\cos\varphi}.$$

À chaque angle φ à trisecter, correspond une conchoïde différente.

L'intersection de la courbe avec le cercle de centre I passant par O permet de déterminer deux points M et N, et grâce aux propriétés fondamentales de la conchoïde, on montre que l'angle NÎP trisecte l'angle OÎH.

Pour le point I, situé sur la directrice, les deux points de la conchoïde situés sur la droite (OI), à une distance *b* de I sont le point O et un point M symétrique de O par rapport à I.
Le cercle de centre I et de rayon OI passe par le pôle O, coupe la conchoïde en M.
Ce cercle coupe la conchoïde en un troisième point N dont la construction est approchée : la droite (ON) coupe la directrice en P tel que NP = *b*.

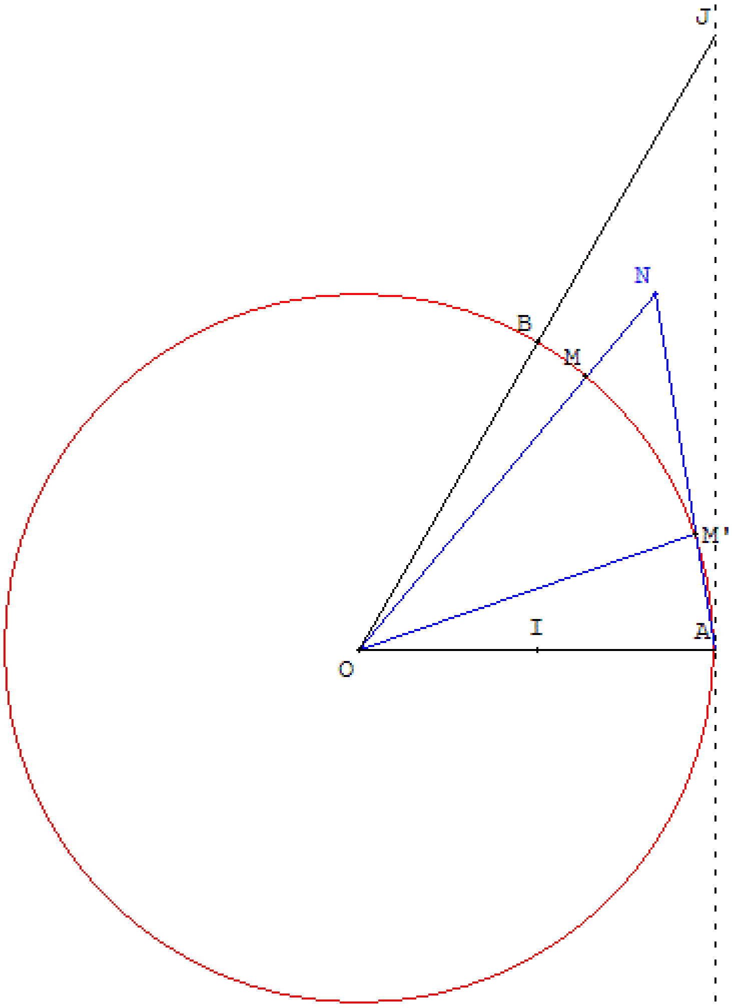
On retrouve la configuration de Viète, deux triangles isocèles de côtés égaux à *b*, d'angles α et 2α :

L'angle trisecté est OPH, car le triangle INP est isocèle avec OPH = NIP = α ;
les angles aigus du triangle isocèle ION sont égaux à 2α ;
Les angles alternes-internes *y*OP et OPH sont égaux à α ;
Les angles alternes-internes *y*OI et OIH sont égaux à 3α et φ = 3α.

L'angle NÎP est le tiers de l'angle OÎH.

Hyperbole de Chasles

Extrait de l'article de Jean-Pierre Friedelmeyer :
une trisection de l'angle ou Michel Chasles revisité
où l'on trouvera tous les calculs.



Énoncé

Étant donné deux points A et B du cercle trigonométrique (c) de centre O,
on cherche les point M de (c) tels que :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 3(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$,
ou encore que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$.

Méthode de résolution

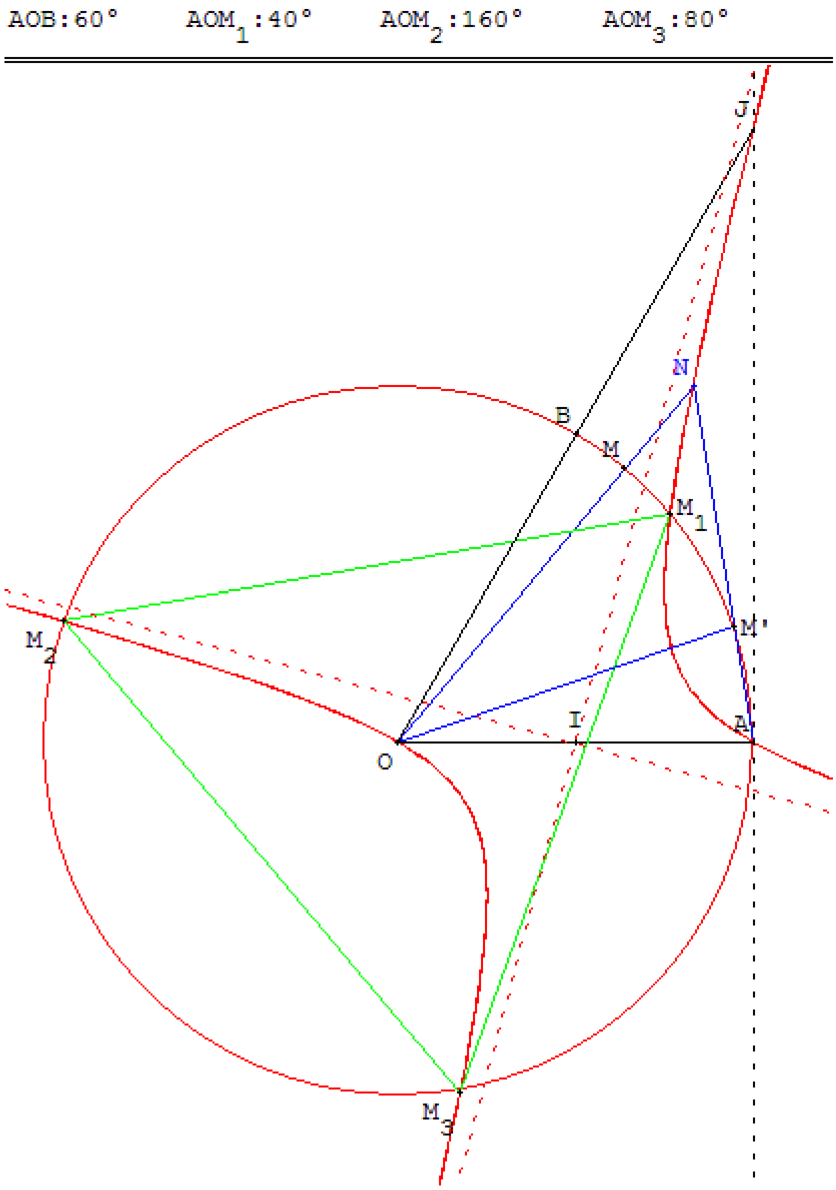
A tout point M de (c), on fait correspondre le point M' de (c) tel que
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$.
La ou les solutions du problème sont données par les points M tels que M = M'.

Traçons les droites (OM) et (AM') et notons N le point d'intersection de ces deux droites.

On remarque que le point N coïncide avec M si et seulement si M = M' ; à condition d'exclure le cas où M est en B et M' en A car, alors, la droite (AM') n'est pas définie.

- On est donc conduit à chercher le lieu (H) du point N,
- et à déterminer les points d'intersection de (H) et (c).

Résolution du problème



Comme le disait Chasles «On reconnaît sans difficulté que la conique , lieu du point N, est une hyperbole équilatère...» dont le centre est le milieu I de [OA].

Les axes de l'hyperbole sont parallèles aux bissectrices de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

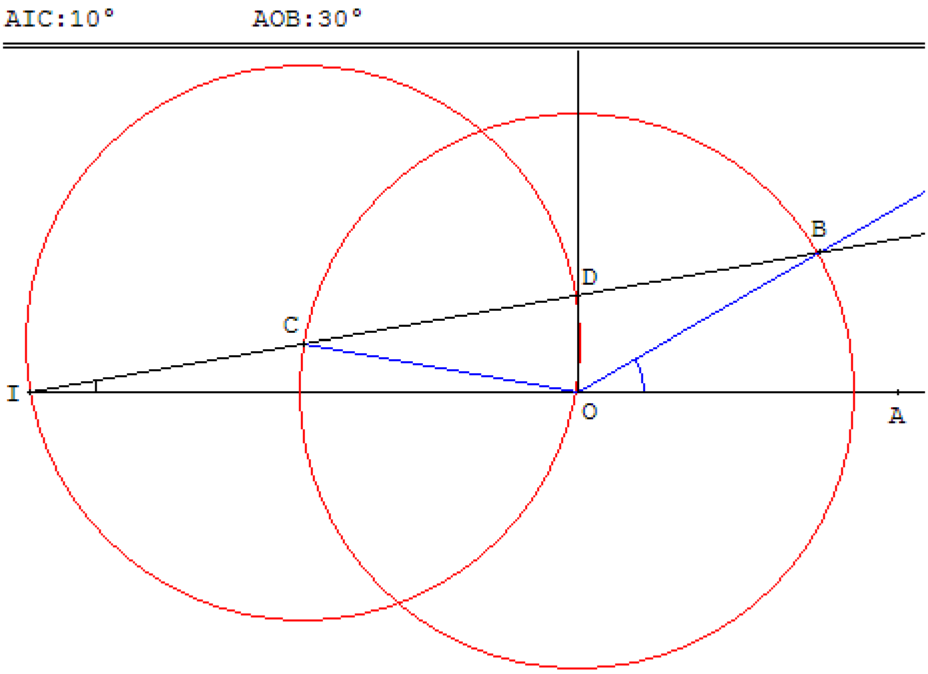
Soit J le point d'intersection de (OB) avec la tangente en A au cercle.
Les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle (JO, JA).
Elles sont aussi parallèles aux bissectrices de l'angle (NO, NA).

Soit $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; $\varphi = \alpha/2 - \pi/4$; $u = \cos(\varphi)$; $v = \sin(\varphi)$;
U point de coordonnées (u, v) et $V(-v, u)$.
Dans le repère $(O, \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$ l'hyperbole a pour équation : $y = vx/(u - 2x)$.

Il y a trois solutions, les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

Méthode de Viète

Triple d'un angle



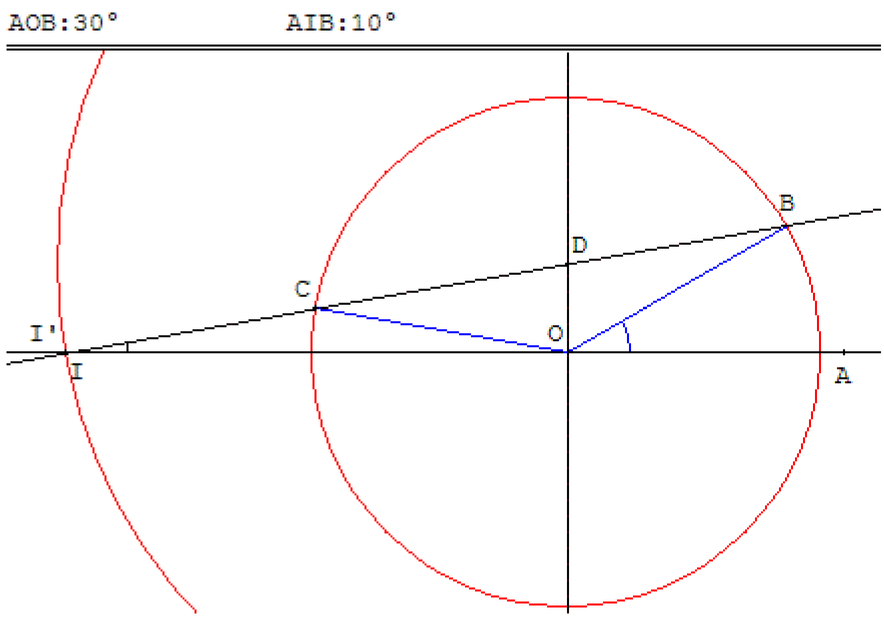
On prend un angle AIC que l'on souhaite tripler.

À partir du point C on trace le cercle de rayon IC qui coupe [IA) en O et [IC) en D.

Le cercle de centre O et de rayon OC coupe [IC) en B et on a AOB = 3 AIC.

On retrouve cette configuration dans les diverses figures de cette page.

Trisection



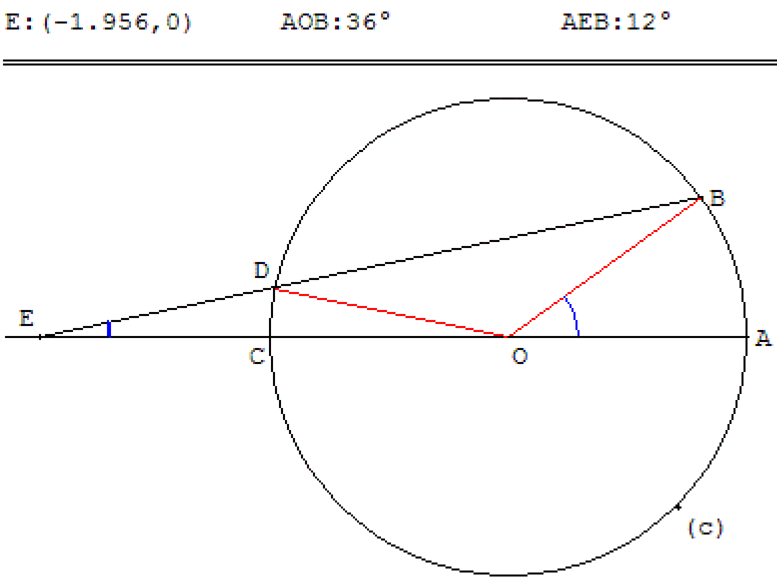
Réciproquement reprend la construction précédente à l'envers en construisant
le cercle de centre O, de rayon OB ainsi que la perpendiculaire à (OA) passant par O.
Un point libre D est sur cette perpendiculaire et le point I est à l'intersection de (CD) et (OA).
Par ailleurs, on a DI = 2OB, à partir de D on construit le cercle de centre D de rayon 2OB,
qui coupe (OA) en I'.

Déplacer le point D, lorsque I et I' sont confondus on a évidemment

AIB = $\frac{1}{3}$AOB.

Remarque : Le point I n'étant pas constructible à la règle et au compas, GéoPlan ne peut le placer géométriquement.

Méthode d'Archimède



Sur un cercle de centre O, on place deux points A et B tels que l'angle AÔB soit égal à 3α.

Soit C le point diamétralement opposé à A.

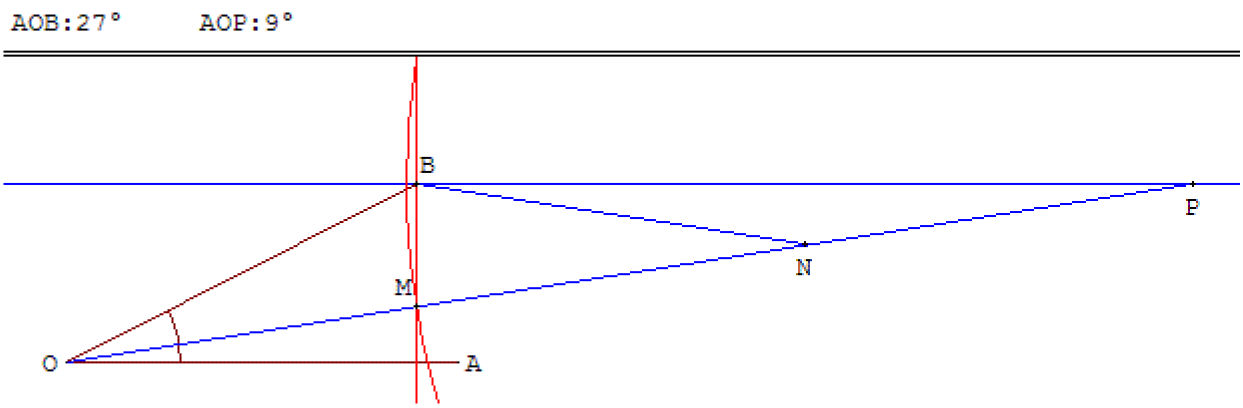
Placer sur le cercle le point D tel que la droite (BD) coupe (AC) en E de telle sorte que ED est égal au rayon du cercle.

Montrer que l'angle AEB est égal au tiers de l'angle AÔB : AEB = α.

Remarque : Le point E n'étant pas constructible à la règle et au compas, GéoPlan ne peut le placer géométriquement.

Avec GéoPlan, on déplacera le point D avec la souris ou les flèches du clavier pour obtenir un point E sur (AC) : abscisse 0 lorsque (AC) est horizontale.
N'étant pas à une contradiction près, en supposant le problème résolu, taper S pour placer le point D exactement dans la figure.

Méthode de Pappus



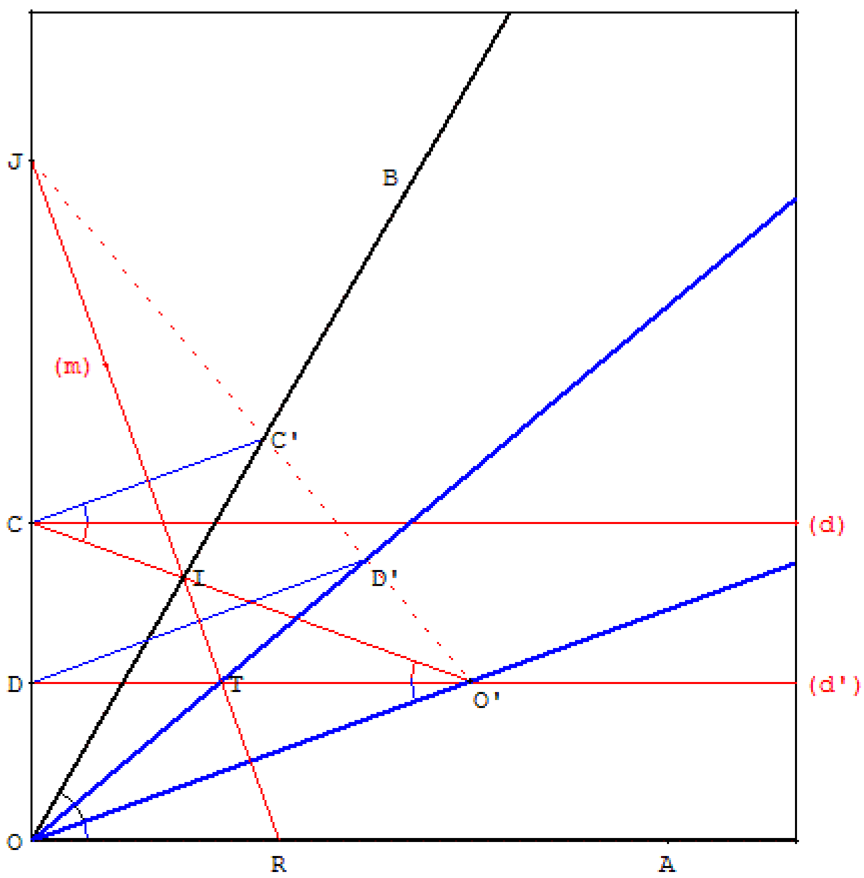
Créer la droite (*d*) parallèle à (OB) passant par B et la droite (*d'*) perpendiculaire à (OA) passant par B, puis le point d'intersection H des 2 droites.
Créer un point libre P sur la droite (*d*), puis la droite (OP).
Le cercle de centre P et de rayon 2OC coupe le segment [OP] en M.
Créer le point N milieu de [PM], puis le segment [BN].
Déplacer le point P pour que M soit sur (*d'*).

Les triangles OHM et MBP sont semblables et AOM = BPM.
Si M est sur (*d'*), les points P, M et B sont sur un même cercle de centre N et de rayon OB. L'angle BNM = 2BPM.
Le triangle ONB est isocèle et l'angle en MOB = BNM = 2BPM = 2 AOP, d'où AOB = 3 AOM.

Pliage d'une feuille

Classe de seconde

Extrait de Wikipédia : Trisection de l'angle



La trisection de l'angle est réalisable, en pliant une feuille de papier, par une construction due à Hisashi Abe (1980), qu'illustre la figure ci-contre :

On trace l'angle AOB à couper en trois en plaçant le sommet O au coin de la feuille de sorte le bord inférieur soit un des côtés de l'angle.

Deux bandes horizontales de même largeur (arbitraire) sont tracées en bas de la feuille (ceci peut se faire facilement par pliage.) On appelle (*d*) et (*d'*) les nouvelles droites qui les délimitent.

Il faut maintenant plier la feuille le long d'un pli (*m*) de sorte que le coin O se trouve déplacé sur la droite (*d'*) (en un point O'), en même temps que le point C (intersection du bord gauche avec la droite *d*) se trouve déplacé sur la droite (OB) en un point C'.

La demi-droite, d'origine O, passant par O' est alors une trisectrice de l'angle donné : l'angle AOO' vaut $\frac{1}{3}$ de l'angle AOB.

le point D (intersection du bord gauche avec la droite *d'*) se trouve déplacé sur la droite (JO*'*) en un point D'. La demi-droite, d'origine O, passant par D ' est l'autre trisectrice.

Remarque

Cet exercice montre que les tracés réalisés par pliage, en n'utilisant que des symétries axiales, peuvent aboutir à des figures non constructibles à la règle et au compas.

Indications

Trisectrice (OO')

Si α = AOO', comme angles alternes-internes α est l'angle de (*d'*) et (OO'),
par symétrie par rapport à (*d'*), l'angle de (*d'*) et (OO') est égal à l'angle de (*d'*) et (CO'), angles égaux à α.

Les droites (OC') et (O'C), symétriques par rapport à la droite (*m*) se coupent en I situé sur l'axe de symétrie. Le triangle IOO', ayant (*m*) comme axe de symétrie, est isocèle et O'OI = IO'O = 2α.

AOB est bien égal à 3α, (OO') est une trisectrice.

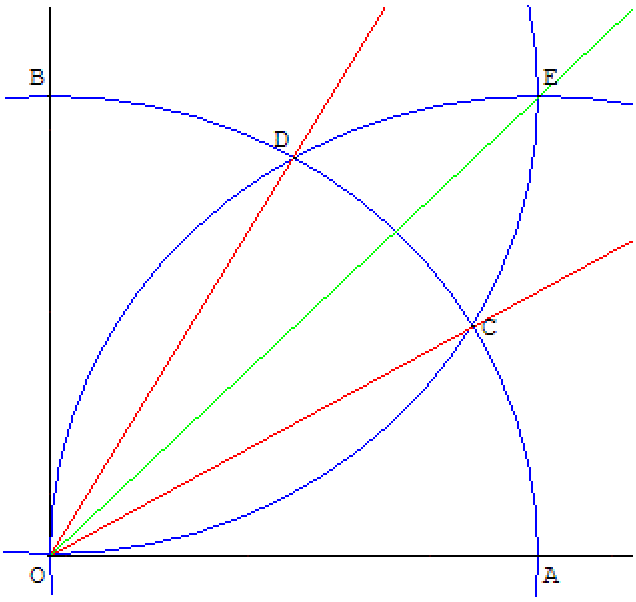
Trisectrice (OD')

La symétrie d'axe (*m*) transforme les points équidistants O, D, C en O', D', C'. Le pont D' est donc le milieu de O'C'. La droite (OD') est la médiane du triangle OO'C'.
Cette symétrie d'axe (*m*) transforme l'angle droit ODO' en O'D'O. (OD'), perpendiculaire à (O'D'), est une hauteur du triangle OO'C'.

(OD'), médiane et hauteur du triangle OO'C', est une médiatrice. OO'C' est un triangle isocèle et (OD') en est une bissectrice.
Comme vu ci-dessus O'OC' = 2α, on a donc AOO' = O'OD' = D'OB = α. On a bien le partage de AOB en trois angles égaux.

Trisection d'un angle droit !

Le tracé de trois cercles de même rayon permet de trouver les trisectrices (OC) et (OD) de l'angle droit AÔB.



Le double ou la moitié d'un angle trisectable est trisectable :

(OE) est la bissectrice de AÔB. AÔE est un angle de $\frac{\pi}{4}$, (OC) est une des trisectrices de cet angle, l'autre trisectrice est la bissectrice de AÔC.

On peut continuer avec la bissectrice de AÔE pour trouver avec le compas les trisectrices d'un angle de $\frac{\pi}{8}$, et ainsi de suite les angles de la forme $\frac{\pi}{2^n}$ sont trisectables.

$\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ sont donc constructibles. *Voir calculs dans* : angles trigonométrie.

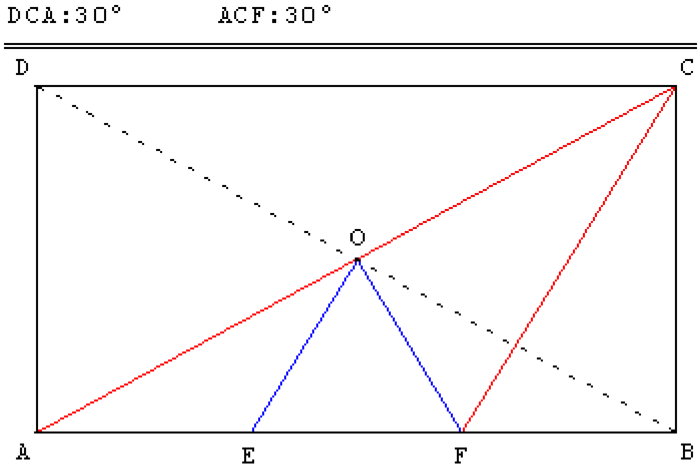
Construction à la règle

E et F partagent un segment [AB], de longueur 3, en trois unités.

Le point O complète le triangle équilatéral EFO.

C et D sont les deux autres sommets du rectangle ABCD de centre O.

Montrer que les droites (CA) et (CF) sont les trisectrices de l'angle DCB.



AB = BC = 3 et BC = AD = $\sqrt{3}$.

Calculer tan(DCA) et tan(FCB).

5. Polygones réguliers constructibles

Savoir construire un polygone régulier, à *n* côtés, c'est savoir construire le point de coordonnées $(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n})$. Ayant ainsi construit un côté de ce polygone, il suffit de reporter de proche en proche sa longueur sur le cercle unité.

Les éléments d'Euclide donnent les constructions des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6 et 15 côtés.

Ils expliquent comment, grâce à la construction des bissectrices, doubler le nombre de côtés d'un polygone.

Théorème de Gauss : Soit *n* et *m* deux entiers naturels premiers entre eux. Le polygone à *nm* côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si les polygones à *n* côtés et à *m* côtés sont constructibles.

En effet, le théorème de Bezout permet de dire que, si *m* et *n* sont premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $um + vn = 1$.
Multipliant cette expression par $\frac{2\pi}{mn}$, il vient : $u\frac{2\pi}{n} + v\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{m}$.

On obtient l'angle $\frac{2\pi}{m}$, sur le cercle unité, en reportant *u* fois l'angle $\frac{2\pi}{n}$ et *v* fois l'angle $\frac{2\pi}{m}$, angles que l'on sait construire.

Exemple - construction du polygone régulier à 15 côtés :
Comme on sait construire le triangle équilatéral et le pentagone régulier, 3 et 5 étant premiers entre eux, en multipliant par $\frac{2\pi}{15}$ la relation de Bezout $2 \times 3 - 5 = 1$,

on obtient l'égalité $2\,\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{15}$.

Sur un cercle, à partir d'un point A, on place un point G tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = \frac{4\pi}{5}$,

le point B tel que $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3}$ est le deuxième sommet du polygone régulier de côté AB.

Il faudra attendre 1796 pour que Gauss démontre que le polygone de 17 côtés était aussi constructible à la règle et au compas.

Polygones constructibles

Un polygone régulier de n côtés est constructible si $\cos \frac{2\pi}{n}$ est un nombre constructible. n est alors une puissance de 2, un nombre premier de Fermat de la forme $1 + 2^{(2\wedge k)}$, un produit de nombres de Fermat ou un produit d'une puissance de 2 par des nombres de Fermat.
Pour n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20 ... les polygones à n côtés sont constructibles.
Pour n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19 ... ils ne le sont pas.